Thomas Cometx

CHAPITRE 13

Probabilités sur un ensemble fini

Une **expérience aléatoire** est une expérience qui peut avoir plusieurs issues, mais dont ne peut pas déterminer exactement laquelle aura lieu. Aussi, on peut répéter l'expérience plusieurs et ne pas obtenir le même résultat. Cependant, il est possible de décrire l'expérience : quelle issue a-t-elle le plus de chance d'arriver ? Que se passe-t-il si on répète l'expérience un certain nombre de fois ? Certaines expériences sont-elles corrélées ? L'étude de ces questions s'appelle l'étude des probabilités.

1. VOCABULAIRE

Pour donner un premier formalisme aux expériences aléatoires, on se concentrera sur les expériences qui auront un nombre fini d'issues possible. Par exemple, le lancer d'un dès classique donne un résultat dans l'ensemble $[\![1,6]\!]$.

Définition 1 | Univers (des résultats observables)

Dans une expérience aléatoire, **l'univers** est l'ensemble des issues possible pour l'expérience aléatoire. On le note généralement Ω.

Exemple 1 —

1. Dans le cas du lancer de dès, l'univers est $\Omega = [\![1,6]\!]$.
2. Si l'expérience est "lancer deux fois le dès" l'univers sera $\Omega = [\![1,6]\!]^2 = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$.

Revenons à l'expérience simple du lancer de dès. Outre le résultat chiffré, on peut s'intéresser à d'autres "propriétés" du lancer. Par exemple, comment décrire le fait d'obtenir un nombre pair. En fait "obtenir un nombre pair" est un des "événements" possibles.

Définition 2 | Événements

Un événement est une partie de Ω (ou un élément $\mathscr{P}(\Omega)$).

Vocabulaire

Un événement contenant un seul élément est appelé un **événement élémentaire**. C'est un singleton, donc une partie de la forme $\{\omega\}$ pour un certain $\omega \in \Omega$.

Exemple 2 —

1. L'événement "obtenir un nombre pair" est la partie $\{2,4,6\}$ de Ω.
2. L'événement "obtenir au moins 3 est la partie $\{3,4,5,6\}$.

Vocabulaire

1. L'événement Ω est **l'événement certain**.
2. L'événement $\emptyset$ est **l'événement vide ou l'événement impossible.**

Définition 3 | Opération sur les événements

Soit Ω un ensemble fini et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ des événements sur Ω. On définit

1. **la réunion des événements** A **et** B : l'événement "A **OU** B" défini par l'union $A \cup B$,
2. **l'intersection des événements** A **et** B : l'événement "A **ET** B" défini par l'union $A \cap B$,
3. **l'événement complémentaire de** A défini par $\overline{A} = E \backslash A$ qui est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

Définition 4 | Événements incompatibles

Deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 3 —

1. Pour le lancer de dès, les événements $A = \{2,4,6\}$ "obtenir un nombre pair "et $B = \{1,3\}$ "obtenir un 1 ou un 3" sont incompatibles car $A \cap B = \emptyset$.
2. Si $C = \{3,4,5,6\}$ est l'événement "obtenir au moins 3", A et C ne sont pas incompatibles car $A \cap C = \{4,6\}$ est non vide.

Définition 5 | Système complet d'événements

Un **système complet d'événements sur** Ω est la donnée d'événements $A_1, \dots A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$

1. deux à deux incompatibles : si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$,
2. de réunion Ω : $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Remarque 1.1 — On dit aussi que les parties A_i forment un partition de Ω.

Exemple 4 —

1. Les événements $A = \{2,4,6\}$ "obtenir un nombre pair" et $D = \{1,3,5\}$ forment une partition de l'univers associé au lancer du dès.
2. Les événements $\{1\}$, $\{2\}$ et $C = \{3,4,5,6\}$ "obtenir au moins 3" forment aussi un système complet d'événements.
3. Les événements $A = \{2,4,6\}$ "obtenir un nombre pair "et $B = \{1,3\}$ "obtenir un 1 ou un 3" ne forment pas un système complet d'événements car $A \cup B \neq \Omega$.

Remarque 1.2 — Si A est un événement sur Ω, les événements A et son complémentaire $\overline{A}$ forment toujours un système complet d'événements.

2. PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

Maintenant que l'on a le vocabulaire des événements, il nous faut le formalisme pour décrire lesquels ont le plus de chance d'arriver. On introduit les probabilités (ou lois de probabilités) sur un ensemble fini Ω.

Définition 6 | Probabilité sur un ensemble fini

Une **probabilité sur un ensemble fini** Ω est une application P de l'ensemble des événements $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant :
1. $P(\Omega) = 1$,
2. si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque 2.1 — La deuxième propriété s'appelle **l'additivité** de la probabilité.

Vocabulaire *(Espace probabilisé)*

Un ensemble fini Ω muni d'une probabilité P s'appelle **un espace probabilisé fini**. On le note (Ω, P).

Vocabulaire *(Cas de l'équiprobabilité)*

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, c'est à dire que

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega^2, P(\{\omega\}) = P(\{\omega'\}),$$

on dit qu'on est dans une situation **d'équiprobabilité**. Dans ce cas

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Exemple 5 —

1. dans le cas du lancer de dès (non pipé), on est bien dans une situation d'équiprobabilité avec $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.
2. on peut calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair, c'est $P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
3. on a bien la $P(\{1,2,3,4,5,6\}) = 1$.

Proposition 1

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.
- $P(\varnothing) = 0$.
- Quelque soit l'événement A, $P(\overline{A}) + P(A) = P(\Omega) = 1$, donc $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Théorème 1 | Formule de Poincaré (ou du crible)

Soient A, B, C trois événements sur Ω et P une probabilité sur Ω.
1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
2. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap B)$.
3. cette formule ce généralise avec autant d'événement que l'on souhaite.

3. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Plaçons nous à nouveau dans notre problème du lancer de dès. A priori, tous les résultats ont la même probabilité. Mais si un observateur a le droit de regarder le dès avant nous, et nous dit que l'on a obtenu un nombre pair, cela change les probabilités. Dès lors on sait que les événements élémentaires $1, 3$ et 5 sont de probabilité nulle, alors que les issues $2, 4, 6$ ont une probabilité $\frac{1}{3}$. Ceci se formalise par la notion de probabilité conditionnelle.

Définition 7 | Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements sur Ω, avec B de probabilité non nulle, alors **la probabilité conditionnelle** de A sachant B est définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple 6 — Avec le lancer de dès, prenons $B = \{2,4,6\}$ "obtenir un nombre pair", $A = \{2\}$ "obtenir un 2" et $C = \{1\}$ "obtenir un 1". On retrouve bien

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(2)}{P(\{2,4,6\})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3},$$

ou encore
$$P_B(C) = \frac{P(C\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0.$$

Théorème 2

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, alors si B est un événement de probabilité non nulle alors

(B, P_B)

est un espace probabilisé. C'est à dire que l'application P_B "restreinte" à $\mathscr{P}(B)$ est une probabilité.

Proposition 2 | Formule des probabilités composées

Soient A et B deux événements sur Ω, avec B de probabilité non nulle, alors
$$P(A\cap B) = P_B(A)P(B).$$

Proposition 3 | Formule des probabilités composées - 2

Soient $A_1, A_2, \dots A_n$ des événements sur Ω, avec $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors
$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Un système complet d'événement peut être un outil pour calculer des probabilités.

Théorème 3 | Formule des probabilités totales

Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B,
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i).$$

En rajoutant une hypothèse sur les événements A_i, on obtient une formule qui fait intervenir les probabilités conditionnelles.

Corollaire 1

Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements fini tels que $P(A_i) \neq 0$ pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, alors pour tout événement B,
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i).$$

Exemple 7 — $(A, \overline{A})$ est toujours un système complet d'événements.

Exemple 8 — Un examen propose une question aléatoire. Si j'ai bien révisé, mais pas trop, j'ai révisé trois quarts des questions. Si je tombe sur une question au hasard, je réponds au hasard et j'ai une chance sur trois de donner la bonne réponse. Quelle est la probabilité que je réussisse cet examen ?

En utilisant ces formules, on peut trouver une formule reliant $P_A(B)$ et $P_B(A)$, c'est à dire en quelque sorte inverser "cause et conséquence".

Théorème 4 | Formule de Bayes

Soit $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'événement et B un événement de probabilité non nulle, alors

$$\forall i [\![1, n]\!], P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B) \times P(A_i)}{P(B)} = \frac{P_{A_i}(B) \times P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) \times P(A_k)}.$$

En particulier, avec le système complet d'événement $(A, \overline{A})$,

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}.$$

Exemple 9 — ***Test médical*** Une société propose un test pour dépister une maladie. On sait que

- une personne sur 100000 est malade,
- si une personne est malade, le test est positif dans 99,8 pour cents des cas,
- si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 99,6 pour cents des cas. Que peut-on dire sur la fiabilité du test. ?

On va considérer les événements M "être malade" et T "faire un test positif". On va calculer $P_T(M)$ autrement dit "la probabilité d'être malade si on a fait un test positif" et voir qu'en fait, ce test ne convient pas. Dans notre cas, la formule de Bayes se réécrit :

$$P_T(M) = \frac{P_M(T) \times P(M)}{P_M(T) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})}.$$

Ici on connaît toutes les données : $P(M) = \frac{1}{100000}, P_M(T) = 0,998, P_{\overline{M}}(T) = 0,004$.

On obtient

$$P_T(M) = \frac{0,998 \times 0,00001}{0,998 \times 0,00001 + 0,99999 \times 0,004}.$$

Le résultat donne environ $0,025$. Autrement dit, il y a 2,5 pour cents de chance qu'une personne positive au test soit effectivement contaminée. **Ce test est nul**.

4. INDÉPENDANCE

Dans cette partie, on fixe un espace probabilisé fini (Ω, P).

Définition 8 | Événements indépendants

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. On dit que A et B sont indépendants si

$$P_A(B) = P(B)$$

ou de façon équivalente

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemple 10 — Sur le lancer du dès

1. les événements A : "obtenir au moins 3 et B : obtenir un nombre pair sont indépendants car $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$ donc $P(A) \times P(B) = \frac{1}{3}$ alors que $A \cap B$ se réécrit "obtenir 4 ou 6" donc $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
2. les événements C : "obtenir 6" et B ne sont pas indépendants car $P_B(C) = \frac{1}{3}$ alors que $P(C) = \frac{1}{6}$. On peut aussi le voir en calculant l'intersection $P(B \cap C) = P(C) = \frac{1}{6}$ (car $C \subset B$) alors que $P(B)P(C) = \frac{1}{2}\frac{1}{6} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{6}$.

Remarque 4.1 — Sur un même univers, deux événements peuvent être indépendants pour une certaine probabilité et ne pas l'être pour une autre (voir exercices).

Définition 9 | Événements mutuellement indépendants

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Ils sont mutuellement indépendants si et seulement si pour tout $k \in [\![1,]\!] n$ et tout choix de k événements $A_{i_1}, \dots A_{i_k}$ on a

$$P(A_{i_1}) \cap \dots P(A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Remarque 4.2 — Il existe aussi une notion d'indépendance **deux à deux** qui est

$$\forall i \neq j, P(A_j \cap A_i) = P(A_j) \times P(A_i).$$

Bien sûr, l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.

Théorème 5

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants, alors les événements $B_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ où l'on fait un choix arbitraire $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ sont aussi mutuellement indépendants.