Thomas Cometx

CHAPITRE 17

Introduction aux espaces vectoriels

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Espace vectoriel

Un **espace vectoriel** (sur $\mathbf{R}$) est un ensemble non vide muni

- d'une loi de composition interne $+$: si $x, y \in \mathrm{E}^2$, alors $x + y \in \mathrm{E}$. Cette loi est commutative :
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, x + y = y + x.$$
Elle est associative :
$$\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}^3, (x + y) + z = x + (y + z).$$
Elle admet un neutre 0_{E} :
$$\forall x \in \mathrm{E}, x + 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} + x = x$$
Tout élément de $x \in \mathrm{E}$ admet un (unique) opposé pour la loi $+$:
$$\forall x \in \mathrm{E}, \exists! y \in \mathrm{E}, x + y = y + x = 0.$$
On le note $-x$.
- d'une multiplication par un réel : si $x \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda x \in \mathrm{E}$. La multiplication par un scalaire doit être distributive par rapport à l'addition :
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$
De plus le 0 est absorbant pour cette multiplication :
$$\forall x \in \mathrm{E}, 0 \cdot x = 0_{\mathrm{E}}.$$

Vocabulaire

Un élément d'un espace vectoriel s'appelle un **vecteur**.

Les réels sont parfois appelés les **scalaires** dans le cadre des espaces vectoriels.

Exemple 1 — L'espace vectoriel **trivial** est l'espace E qui ne contient qu'un neutre :

$$E = \{0_E\}.$$

Exemple 2 — $\mathbf{R}$, muni de l'addition classique, est un espace vectoriel. Le neutre est 0 et l'opposé d'une nombre x est $-x$. La multiplication "externe" est en fait la multiplication des réels.

Exemple 3 — ***L'espace vectoriel R^n***

L'espace vectoriel "de base" des $\mathbf{R}^n$. On se rappelle qu'on l'a muni d'une addition définie par

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

ainsi que d'une multiplication par un scalaire

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Le neutre est le vecteur

$$0_{\mathbf{R}_n} = (0, \ldots, 0)$$

et l'opposé de

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{est } -x = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

La commutativité et l'associativité de l'addition sont évidentes et la multiplication externe est bien distributive :

$$\begin{aligned}\lambda(x+y) &= \lambda(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \ldots, \lambda(x_n + y_n)) \\ &= (\lambda_x 1, \ldots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n) \\ &= \lambda x + \lambda y.\end{aligned}$$

Exemple 4 — *L'espace vectoriel* $\mathrm{M}_{n,1}(\boldsymbol{R})$.

$\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel :

- on sait déjà faire des additions de matrices, et de vecteurs de colonnes

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

- le neutre est le vecteur nul

$$0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- on peut multiplier un vecteur par un scalaire réel λ

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

- tout vecteur x à un inverse $-x = -1 \cdot x$;

$$x - x = x + (-x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \\ \vdots \\ x_n - x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour voir la commutativité, l'associativité et la distributivité de la multiplication par un scalaire (réel), cela fonctionne comme dans l'exemple précédent !

Exemple 5 — *Les espaces de polynômes* $\mathbf{R}[x]$ et $\mathbf{R}_n[x]$ sont des espaces vectoriels.

L'addition est la multiplication par un réels, sont celles que l'on a vues dans le chapitre sur les polynômes. Ces opérations vérifient toutes les conditions nécessaires.

Il a une subtilité ici : pour $\mathbf{R}_n[x]$, il faut bien utiliser que si P et Q sont de degré inférieur ou égal à n, c'est aussi le cas de $P+Q$, et de λP (si $\lambda \in \mathbf{R}$).

Exemple 6 — *Les espaces de suites et fonctions*

L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel, parfois noté $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

De la même façon, si E est un ensemble, alors l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbf{R}$ est aussi un espace vectoriel. Il sera noté $\mathscr{F}(\mathscr{E}, \mathbf{R})$.

A chaque fois, les opérations sont les opérations sont celles évoquées dans les chapitres précédents : elles découlent des opérations sur les réels donc les propriété de commutativité, distributivité, associativité sont bien vérifiées. On a bien un neutre qui est la suite nulle ou la fonction nulle, est l'opposé de chaque élément est la fonction "$-f : x \mapsto -f(x)$."

Exemple 7 — *Les espaces de matrices* Soient $n, p > 0$ des entiers. Si on additionne des matrices de $M_{n,p}(\mathbf{R})$, la somme des dans $M_{n,p}(\mathbf{R})$. De plus, l'addition de matrices a un neutre, c'est la matrice nulle $0_{n,p}$. Toute matrice a bien un opposé pour l'addition car $-M+M$ est la matrice nulle.

Attention

C'est bien l'addition des matrices qui doit être commutative, la multiplication ne l'est pas !

Notation

Attention, si on note usuellement E un espace vectoriel, les éléments $x \in E$ seront souvent notés différemment selon le cadre :

1. Dans le cas de $\mathbf{R}_n$, on notera usuellement les vecteurs x ou y et on notera $x = (x_1, \dots, , x_n)$ les coordonnées. **Cependant, si** $n = 2$ **ou** $n = 3$, on peut garder nos habitudes, et noter les vecteurs u et v, et noter les coordonnées $u = (x, y)$ ou $u = (x, y, z)$. Dans $\mathbf{R}^4$, on verra même des (x, y, z, t). Dans tous les cas, gardez les notations de l'énoncé.
2. Dans $M_{n,1}(\mathbf{R})$, on notera usuellement les vecteurs X ou Y, et pour les coordonnées, on fera comme dans $\mathbf{R}^n$.
3. Dans les espaces de matrices, on notera les matrices M ou N. Pour les coordonnées on gardera les notations des matrices.
4. Dans les espaces de suites, on notera les vecteurs $(u_n)_n$ ou (u) ou u ou $(u_n)_n$ car les objets sont des suites (alors que u_n est un réel) ! On utilisera souvent les lettres v et w aussi, mais il arrivera de prendre des suites de tout nom.
5. Dans les espaces de fonctions, f et g seront les notations usuelles. Il serait

trompeur d'y appeler les vecteurs x ou y car ce sont les variables des objets de E qui sont les fonctions.

On termine cette introduction par quelques règles de calcul qu'il faudra bien avoir en tête au moment de passer sur les exercices. Elles découlent de la définition d'espace vectoriel et son naturelles.

Proposition 1

Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathrm{E}$:

$$\lambda x \iff 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_{\mathrm{E}}.$$

Proposition 2

Soient $(x, y, z) \in \mathrm{E}^3$, alors

$$x + y = x + z \Rightarrow y = z.$$

Proposition 3

Soient $\lambda \in \mathrm{R}$ et $x \in \mathrm{E}$, alors

$$-(\lambda x) = (-\lambda x).$$

2. COMBINAISONS LINÉAIRES

Définition 2 | Famille finie dans un espace vectoriel

Une famille finie dans un espace vectoriel est la donnée d'une liste finie de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de E. On dit que la famille est de cardinal n.

Définition 3 | Combinaison linéaire

Soit E un espace vectoriel réel et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E. Une **combinaison linéaire** des vecteurs v_i est tout vecteur qui admet une expression

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

où les λ_i sont des scalaires réels.

Méthode ***(Montrer qu'un vecteur x est une combinaison linéaire d'une famille donnée $(v_1, \dots, v_n)$)***

On raisonne par **analyse-synthèse** : on cherche des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Exemple 8 — Montrer que $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 9 — Montrer que, dans $E = \mathbf{R}_2[x]$, $x^2 - 1$ est une combinaison linéaire de $2x^2 + 2x - 4$ et $-7x + 7$.

3. SOUS-ESPACE VECTORIEL

Définition 4 | Sous-espace vectoriel

Un sous-espace vectoriel de E est un sous-ensemble inclus dans F qui est aussi un espace vectoriel.

Méthode ***(Montrer qu'une ensemble F est un sous-espace vectoriel de E)***

Il suffit de
1. Montrer que $F \subset E$.
2. Montrer que F est non vide en prouvant que $0_E \in F$.
3. Montrer que si $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $x + \lambda y \in F$. Cela peut se décomposer en deux tâches : montrer que $x + y \in F$ et que $\lambda x \in F$.

Remarque 3.1 — Quand un exercice demande de prouver qu'un ensemble est un espace-vectoriel, il suffit souvent de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace de référence.

Exemple 10 —

1. **Montrons que** $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, x + y - z - t = 0\}$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathbf{R}^4$**.**
   1) Bien évidement $F \subset \mathbf{R}^4$.
   2) F est non vide car le neutre $(0, 0, 0, 0)$ vérifie $0 + 0 - 0 - 0$.
   3) Soient $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $v_2 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ des éléments de F et soit $\lambda \in R$. Alors $v_1 + \lambda v_2 = (x_1 + \lambda x_2, y_1\lambda y_2, z_1\lambda z_2, t_1\lambda t_2)$ vérifie
   $$\begin{aligned}(x_1 + \lambda x_2) + (y_1\lambda y_2) - (z_1\lambda z_2) - (t_1\lambda t_2) &= (x_1 + y_1 - z_1 - t_1) + \lambda(x_1 + y_2 - z_2 - t_2) \\ &= 0 + \lambda \times 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$
   F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. **Montrons que l'ensemble des suites qui tendent vers** 0 **est un espace vectoriel.**
   Le plus simple est de montrer que c'est un sous-espace vectoriel des suites.
   1) L'ensemble en question est bien inclus dans l'espace vectoriel des suites réelles.
   2) La suite nulle y appartient car elle tend vers 0. L'espace est donc non vide.
   3) Il nous suffit donc de montrer que si u et v sont des suites qui tendent vers 0 et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $u + \lambda v$ tend aussi vers zéro, ce qui est clair par limite de la somme.
   L'ensemble des suites qui tendent vers 0 et donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites, et donc c'est un espace vectoriel.
3. **Montrons que l'ensemble des matrices symétriques de** $M_n(\mathbf{R})$ **est un espace vectoriel.**
   On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$.
   1 et 2) Il inclus dans $M_n(\mathbf{R})$ et bien non vide car la ${}^t0_n = 0_n$.
   3) Si A et B sont symétriques et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors par linéarité de la transposée
   $${}^t(A + \lambda B) = {}^t(A) + \lambda\,{}^t(B) = A + \lambda B,$$
   donc $A + \lambda B$ est symétrique.
   L'ensemble des matrices symétriques est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$, donc c'est un espace vectoriel.
4. **Montrer que** $C([0, 1])$ **est un espace-vectoriel.**

Définition 5 | Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie

Soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie dans un espace vectoriel E. Le sous espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{F}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$. On le note $Vect(\mathscr{F})$. Autrement dit

$$Vect(\mathscr{F}) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n\}.$$

Remarque 3.2 — Pour montrer qu'un vecteur x appartient à $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, on montrer que x est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots v_n$.

Proposition 4

Soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie dans un espace vectoriel E. Alors $Vect(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 3.3 — $Vect(v_1, \dots, v_n)$ est le plus petit espace vectoriel qui contient tous les vecteurs v_i, dans le sens où si G est un sous-espace vectoriel de E tel que pour tout i, $v_i \in \mathrm{G}$, alors forcément $Vect(v_1, \dots, v_n) \subset \mathrm{G}$.

Proposition 5

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de E. Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i \in \mathrm{F}$, alors $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subset \mathrm{F}$.

4. FAMILLES LIBRES, FAMILLES GÉNÉRATRICES

Définition 6 | Famille génératrice

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille dans un espace vectoriel E. Elle est **génératrice** si $Vect(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{E}$. Autrement si tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs v_i.
C'est à dire que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_x v_k.$$

Méthode *(Montrer qu'une famille est génératrice)*

Pour montrer qu'une famille $(v_1, \dots v_n)$ de E est génératrice, on fixe $x \in \mathrm{E}$ quelconque, et par analyse synthèse on trouve des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Exemple 11 — Dans $\mathbf{R}_2[x]$, montrer que la famille $(x^2, x-1, x+1)$ est libre.

Cette méthode fonctionne si on vous donne une famille explicite, et qu'on vous demande de prouver qu'elle l'est. Parfois on vous demandera de trouver par vous même une famille génératrice, notamment d'un sous-espace vectoriel.

Méthode *(Déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel)*

Pour déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel $F \subset E$, on fixe $x \in E$. Ensuite, on cherche des vecteurs $(v_1, \dots, v_n) \in F$ **qui ne dépendent pas de** x et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Exemple 12 — Déterminer une famille génératrice de

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}.$$

Définition 7 | Famille libre

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille dans un espace vectoriel E. Elle est **libre** si la seule façon d'obtenir le vecteur nul en faisait une combinaison linéaire des vecteurs x_i est de faire la combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0.$$

Méthode *(Montrer qu'une famille d'un espace vectoriel est libre)*

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille dans un espace vectoriel. Pour montrer qu'elle est libre on introduit des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$$

et on montre, en les réorganisant, que cela implique que

$$\forall k \in [\![1,,]\!], \lambda_k = 0.$$

Exemple 13 — Les familles suivantes sont elles libres, génératrices dans $\mathbf{R}^3$?

1. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$.
2. (v_1, v_2) avec $v_1 = (2, 0, 1)$ et $v_2 = (1, 0, -1)$.
3. (v_1, v_2, v_3, v_4) avec $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ et $v_4 = (1, -2, 3)$.
4. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (0, -1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1)$.

Définition 8 | Base d'un espace vectoriel

Une famille de vecteurs $(v_1,\dots v_n)$ est une **base d'un espace vectoriel** E si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de **façon unique** comme combinaison linéaire des vecteurs v_i. C'est à dire que

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n, x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_x v_k.$$

Théorème 1

Une famille de vecteurs est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

Méthode *(Montrer qu'une famille $(v_1,\dots,v_k)$ est une base d'un espace vectoriel)*

On a deux choix :
1. On montre, par les méthodes précédentes, qu'elle est libre et génératrice.
2. On fixe $x \in E$ quelconque, et par analyse-synthèse, on montre qu'il existe des uniques réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Méthode *(Déterminer une base d'un (sous)-espace vectoriel)*

On reprend la méthode de détermination d'une famille génératrice, puis on a deux choix :
1. soit on montre que la famille obtenue est libre
2. soit on a montré, dans la détermination des scalaires réels, que ceux-ci sont uniques.

Attention

Une base d'un espace vectoriel n'est **jamais unique**. On n'écrira pas jamais **LA BASE** de E. Certaines bases sont plus intuitives que d'autres, on parle de **base canonique**.

Exemple 14 — Déterminer deux bases différentes de

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}_3, x+y+z=0\}.$$

5. BASES CLASSIQUES

Vous devrez connaître un certain nombre de résultats sur les espaces vectoriels classiques, notamment certaines de leurs bases.

$\mathbf{R}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ La **base canonique** de $\mathbf{R}^n$ est

$$(e_1,\dots,e_n)$$

où $e_i = (0,\dots,0,1,0\dots,0)$ où le 1 est placé en i-ème position.

De même, la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est $(e_1,\dots,e_n)$ où e_i est la matrice colonne avec des 0 partout sauf en i-ème ligne :

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0. \end{pmatrix}$$

Théorème 2

La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Matrices. La **base canonique** de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est $(\mathrm{E}_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!])$ où $\mathrm{E}_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1.

Il faut savoir aussi multiplier les matrices de cette base canonique.

Proposition 6

Soit $\mathrm{E}_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{E}_{k,\ell} \in \mathrm{M}_{p,m}(\mathbf{R})$, alors

$$\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_j^k \mathrm{E}_{i,\ell}$$

où

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Théorème 3

La famille $(E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!])$ est une base de $M_{n,p}(\mathbf{R})$.

Polynômes. La **base canonique** de $\mathbf{R}_n[x]$ est donnée par $(1,\dots,x^n)$. En effet tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[x]$ se décompose de façon unique comme

$$P = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k.$$

Théorème 4

$\mathscr{B} = (1,\dots,x^n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

Théorème 5

Soit $\mathscr{B} = (P_0,\dots,P_n)$ une famille de polynôme **étagée** (c'est à dire que pour tout $k, \deg(P_k) = k$. Alors $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

La base canonique de $\mathbf{R}[x]$ est la famille dénombrable (c'est à dire en bijection avec $\mathbf{N}$,

$$(x^k)_{k\in\mathbf{N}}.$$

C'est une base de cardinal infini, nous reparlerons des particularités de cas là durant le second semestre.

6. UTILISATION DES MATRICES

Une fois qu'on a prouvé qu'une famille $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base d'un espace vectoriel, on peut raisonner "par isomorphisme" dans $\mathbf{R}^n$. En effet, l'application

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_x \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est ce qu'on appelle un **isomorphisme** d'espaces vectoriels : elle réalise une bijection entre les deux espaces.

La matrice obtenue s'appelle **matrice (ou vecteur)** (des coefficients) de x dans la base $\mathscr{B}$. Cela permet de rendre certaines preuves plus lisibles et universelles : souvent une preuve réalisée avec cette représentation restera valable pour d'autres espaces vectoriels.

Reprenons par exemple ces deux preuves :

1. dans $\mathbf{R}_2[x]$, montrer que la famille $(x^2, x-1, x+1)$ est libre,
2. Déterminer une base de

$$\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathrm{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0.\}$$

3. Montrer que la famille $(x^2-1, x^2+1, x^3-x, x^3+x)$ est une base de $\mathbf{R}_3[x]$.