CHAPITRE 2

Raisonnements. Éléments de logique.

1. ÉLÉMENTS DE LOGIQUE

Définition 1 | Proposition

Une proposition (ou une assertion) est une phrase mathématique qui peut être vraie ou fausse. Elle peut comporter des variables comme x dont le nom n'est pas important, on dit que les variables sont "muettes". On peut noter la proposition P ou P(x) selon si elle dépend ou pas de x.

Exemple 1 —

1. Soit P(x) l'assertion "$x < x^2$". Elle est vraie pour $x \in]-\infty, 0[\cup]1+\infty[$ mais fausse si $0 \leqslant x \leqslant 1$.
2. La proposition Q(x) : "$x^2 \geqslant 0$" est vraie pour tout réel x.

Définition 2 | Quantificateurs

Pour décrire les assertions mathématiques, on utilise des quantificateurs. Trois sont à connaître :

1. le quantificateur **pour tout** ou **quelque soit** : noté $\forall$,
2. le quantificateur **il existe** : noté $\exists$
3. le quantificateur **il existe un unique** : noté $\exists!$.

Exemple 2 —

1. P : "$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 > 0$" signifie que pour tout réel x, x^2 est strictement positif. C'est une proposition fausse car elle est fausse pour $x = 0$.
2. Q : "$\exists x \in \mathbf{R}, x^2 = x$ signifie qu'il existe un réel x tel que $x^2 = x$. Elle est vraie car elle fonctionne pour $x = 0$ ou $x = 1$.
3. R : "$\exists! x \in \mathbf{R}, x^2 = 2$ signifie qu'il existe un unique réel x tel que $x^2 = 2$. Elle est fausse car il en existe 2 : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Définition 3 | Connecteurs logiques - 1

Quand on a deux propositions P et Q on peut en créer une troisième à partir de connecteurs logiques.

1. la **négation** : la négation de P, notée "non P" est vraie lorsque P est fausse,
2. l'**intersection** : l'intersection de P et Q, notée P et Q ou P$\cap$Q est vraie uniquement lorsque P et Q sont vraies simultanément,
3. la **réunion** : la réunion de de P et Q, notée P ou Q ou P $\cup$ Q est vraie lorsque au moins P ou Q est vraie.

On présente parfois les liens entre propositions par des tables de vérité : celles-ci présentent, pour chaque valeurs possibles (vraie ou fausse) de propositions P et Q par exemple, la valeurs d'autres proposition que l'on construit à partir d'elles. Voici les tables de vérité du **Non**, du **Et** et du **Ou**.

P	non P
V	F
F	V

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

Théorème 1 | Lois de de Morgan

- non (P et Q) $\iff$ (non P) ou (non Q),
- non (P ou Q) $\iff$ (non P) et (non Q)

Proposition 1 | Propriétés des connecteurs logiques - 1

Soient P et Q deux propositions :

- non $(\exists x, \mathrm{P}(x)) \iff \forall x,$ non $(\mathrm{P}(x))$,
- non $(\forall x, \mathrm{P}(x)) \iff \exists x,$ non $(\mathrm{P}(x))$,

Exemple 3 —

1. La négation de " $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = 5$" est "$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 5$".
2. La négation de " $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 1$ " est "$\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \geqslant 1$".

On démontre ce genre d'équivalences en établissant les tables de vérité et en vérifiant qu'elles coïncident pour toutes les valeurs logiques de P et Q. Faisons le pour la première loi de de Morgan.

P	Q	P et Q	non(P et Q)	non P	non Q	(non P) ou (non Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Définition 4 | Connecteurs logiques - 2

Il y a encore d'autres connecteurs logiques.

4. l'**implication** : "P $\implies$ Q" (qui se lit "P implique Q") signifie que lorsque P est vraie, c'est aussi le cas pour Q,
5. l'**équivalence** : "P $\iff$ Q" (qui se lit "P équivaut à Q" ou "P est équivalent à Q" ou "P si et seulement si Q") signifie que P est Q sont toujours vraies simultanément ou fausses simultanément.

Les tables de vérité de l'implication et de l'équivalence sont les suivantes.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposition 2 | Propriétés des connecteurs logiques - 2

Soient P et Q deux propositions :

- **[Contraposée]** $[P \implies Q] \iff [\text{non } Q \implies \text{non } P]$,
- **[Double implication]** $[P \iff Q] \iff [P \implies Q \text{ et } Q \implies P]$,
- non $(P \Rightarrow Q) \iff P$ et(nonQ)).

Les deux premiers points seront traités dans des parties dédiées. Quant au troisième, on le démontre en établissant les tables de vérité des deux propositions.

Résumé : table de vérité. On peut résumer tout cela dans une table de vérité.

P	Q	P ou Q	P et Q	non P	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V

On voit par exemple que les valeurs vraies ou fausse de $[P \Rightarrow Q]$ et [P et (nonQ)] sont bien opposées. On peut construire la table de vérité qui prouve le principe de contraposition.

Remarque 1.1 — On remarque dans les tables que "(P ou Q)" est équivalent à "(non P) $\Rightarrow$ Q". Cela peut faciliter des preuves.

2. COMMENT DÉMONTRER PROPOSITION OU UNE IMPLICATION ?

2.1. Comment démontrer une assertion quantifiée

Pour démontrer des assertions du type "$\forall x \in E, P(x)$" ou "$\exists x \in E, P(x)$", on s'y prend avec des méthodes différentes.

Méthode *(Démontrer une assertion de la forme "$\forall x \in E, P(x)$")*

1. On fixe un élément quelconque de $x \in E$,
2. On montre que $P(x)$ est vrai pour ce x fixé.

Exemple 4 — ***Montrer que l'assertion*** "$\forall x \in \mathbf{R}, x \leqslant \frac{x^2+1}{2}$" ***est vraie.***

Soit $x \in \mathbf{R}$, montrons que $P(x)$: "$x \leqslant \frac{x^2+1}{2}$". (Cette étape est fondamentale, c'est ici qu'on fixe le x quelconque pour la suite de la démonstration)

On calcule

$$\begin{aligned} x - \frac{x^2+1}{2} &= \frac{2x - x^2 - 1}{2} \\ &= -\frac{(x-1)^2}{2} \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x - \frac{x^2+1}{2} \leqslant 0$ donc $x \leqslant \frac{x^2+1}{2}$. C'est vrai pour tout x donc on a terminé la démonstration.

Remarque 2.1 — Pour montrer qu'une assertion de la forme "$\forall x \in E, P(x)$" est fausse, c'est bien plus facile. Il suffit de trouver un élément de E, appelé **contre-exemple**, pour lequel $P(x)$ est fausse. Par exemple, la proposition

$$\forall x \in \mathbf{R}, x > 0$$

est fausse car dans ce cas là, $P(x)$: "$x > 0$" est fausse par exemple pour $x = -1$.

Méthode *(Démontrer une assertion de la forme "$\exists x \in E, P(x)$")*

Il suffit de trouver un élément x dans E qui vérifie la propriété $P(x)$.

Exemple 5 — ***Montrer que la propriété*** $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 = 2$ ***est vraie.*** Il suffit de proposer $x = \sqrt{2}$ qui montre que la propriété est vraie.

Dans ce dernier exemple, c'était très simple de trouver une valeur de x convenable. Parfois, c'est plus compliqué. On a besoin d'un nouveau type de raisonnement. C'est le raisonnement par analyse-synthèse, particulièrement adapté pour démontrer une propriété de la forme

$$\exists! x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x).$$

Méthode *(Raisonnement par analyse-synthèse)*

1. **[Analyse]** On suppose l'existence d'un élément x de E qui vérifie $\mathrm{P}(x)$.
2. On raisonne par **condition nécessaire** pour trouver l'unique valeur possible pour x.
3. **[Synthèse]** On vérifie que x satisfait $\mathrm{P}(x)$. (On parle de **condition suffisante.)**
4. On conclut : l'élément x trouvé convient et est l'unique de E vérifiant $\mathrm{P}(x)$.

Exemple 6 — ***Montrons la propriété "***$\exists! x \in \mathbf{R}_+, x^2 + 4x = 4x + 12$***".***

1. **Analyse.** Soit x un réel positif qui vérifie la propriété. Alors $x^2 = 12$, donc $x = +\sqrt{12}$ ou $x = -\sqrt{12}$. Comme $x \geqslant 0$, nécessairement $x = \sqrt{12}$.
2. **Synthèse.** Bien évidement, $\sqrt{12}$ est solution de l'équation.
3. **Conclusion.** Il existe donc un unique x solution de l'équation, et c'est 12.

2.2. Démontrer une implication, une équivalence

Démontrer une implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ c'est simple, on suppose que P est vraie, on écrit ce que ça signifie, puis on essaie de montrer que Q est vraie. Pour démontrer une équivalence, on se ramène souvent à des implications grâce à la proposition suivante.

Proposition 3

L'équivalence $\mathrm{P} \iff \mathrm{Q}$ est équivalente à

$$(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \text{ et } (\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P}).$$

Cela se voit avec la table de vérité car les deux dernières colonnes sont équivalentes.

P	Q	P ⇒ Q	Q ⇒ P	(P ⇒ Q) et (Q ⇒ P)	P ⟺ Q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F

Méthode *(Démontrer une équivalence)*

Pour démontrer l'équivalence P $\iff$ Q.
1. On montre P $\Rightarrow$ Q.
2. On montre Q $\Rightarrow$ P.
3. On conclut que P $\iff$ Q.

Exemple 7 — Montrer par double implication qu'un trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles de signe opposé si et seulement si $ac < 0$.

Remarque 2.2 — On peut aussi raisonner par équivalence et essayer de relier P et Q par une suite d'équivalences logique comme pour la résolution d'une équation. C'est plus rapide, mais il faut être très soigneux.

Vocabulaire

Soit P est une proposition.
1. Une assertion Q telle que P $\Rightarrow$ Q est appelée **condition nécessaire** (à P). Si elle est fausse, cela implique que P est fausse aussi !
2. Une assertion Q telle que Q $\Rightarrow$ P est appelée **condition suffisante** (pour P). Si elle est vraie, cela implique que P est vraie aussi !
3. Une proposition équivalente à P est appelée une condition nécessaire et suffisante.

Exemple 8 — Donner une condition nécessaire est suffisante sur x pour que $x^2 > 4$.

2.3. Démonstration d'une implication par contraposée

On rappelle que la contraposée de l'implication P $\Longrightarrow$ Q est l'implication non Q $\Longrightarrow$ non P. On a vu qu'une implication est équivalente à sa contraposée. Parfois, la contraposée sera plus facileà démontrer !

Proposition 4 | Contraposée d'une implication

Une implication (P $\Rightarrow$ Q) est équivalente à sa contraposée (non Q) $\Rightarrow$ (non P).

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	non Q	non P	non Q $\Rightarrow$ non P
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Exemple 9 — Soit $x \geqslant 0$. Montrer que "$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, (x \leqslant \varepsilon) \implies x = 0$" est vraie. Ici on veut montrer P $\implies$ Q avec P : "$\forall \epsilon > 0, x \leqslant \varepsilon$" et Q : $x = 0$. Cela peut paraître difficile, mais par contraposée c'est plus simple ici. La contraposée s'écrit non Q $\Rightarrow$ non P, autrement dit

$$x > 0 \implies (\exists \epsilon > 0, \epsilon < x).$$

C'est très facile : si $x > 0$, il suffit de prendre $\epsilon = \frac{x}{2}$ qui convient. Donc cet ϵ existe.

2.4. Démonstration par l'absurde

Méthode *(Démontrer une proposition par l'absurde)*

Pour prouver qu'une proposition est vraie, on peut faire ce qu'on appelle un raisonnement par l'absurde.

1. On suppose que la proposition est fausse, autrement dit on suppose "non P".
2. On essaye d'en déduire une proposition fausse (comme $0 > 1$, ou $x^2 < 0$ pour un réel x).
3. On en déduit que P est forcément vraie.

Remarque 2.3 — Parfois la contradiction obtenue est "non P" on donc on obtient bien une contradiction car on a alors "P et non(P)" qui est une proposition toujours fausse.

Exemple 10 — ***Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel***

2.5. Démonstration par disjonction de cas

Proposition 5

Si P $\Rightarrow$ Q et (non P) $\Rightarrow$ Q sont vraies, alors Q est vraie.

On le voit sur la table de vérité suivante, les seules lignes pour lesquelles on a les deux implications sont celles où Q est vraie.

P	non P	Q	P $\Rightarrow$ Q	(non P) $\Rightarrow$ Q	P $\Rightarrow$ Q **et** non P $\Rightarrow$ Q
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F

Pour démontrer une proposition, on est souvenant amené à en introduire une autre pour raisonner par disjonction de cas.

Exemple 11 — ***Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier*** On raisonne par disjonction de cas selon si n est pair ou impair. (Cela correspond bien à nonP et P pour P : n est pair.

- Cas 1 : n est pair. Il existe un entier k tel que $n = 2k$. Alors
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$
qui est un nombre entier.
- Cas 2 : n est impair. Il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. Alors
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = \frac{2(2k+1)(k+1)}{2} = (2k+1)(k+1)$$
qui est un nombre entier.

Dans tous les cas, on obtient un nombre entier. On a donc démontré la proposition.

L'exemple suivant mélange raisonnement par l'absurde et par disjonction de cas.

Exemple 12 — ***Montrons que l'ensemble des nombres premiers est infini*** Supposons par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers est fini. On note alors $\{p_1, \dots, p_n\}$ l'ensemble des nombres premiers, dans l'ordre croissant.

Considérons $m = p_1 \times p_2 \times \dots p_n + 1$. On raisonne par disjonction de cas : si m est premier, alors on a une contradiction car $m > p_n$ est un nombre premier plus grand que p_n. Si

m n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p_i, alors p_i divise m et p_i donc il divise $m - p_1 \times p_2 \times \ldots p_n = 1$. Donc $m = 1$. On obtient aussi une contradiction.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction. Donc, par raisonnement par l'absurde, l'hypothèse de départ est fausse, donc l'ensemble des nombres premiers est bien infini.

2.6. Principe de récurrence

Le raisonnement par récurrence est le raisonnement qui permet de démontrer des assertions de la forme

$$\mathrm{A} : \forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{P}(n)$$

où $\mathrm{P}(n)$ est une proposition dépendant de l'entier n. Il repose sur un principe simple : si $\mathrm{P}(0)$ est vraie et si pour tout n, la proposition $\mathrm{P}(n)$ implique le successeur $\mathrm{P}(n+1)$, alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout n. Autrement dit A est vraie. Formellement, le principe s'énonce ainsi :

Théorème 2 | Principe de récurrence

Soit $\mathrm{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier n. Supposons que
1. **[Initialisation]** $\mathrm{P}(0)$ est vraie
2. **[Hérédité]** quelque soit n, $(\mathrm{P}(n) \implies \mathrm{P}(n+1).)$

Alors $\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{P}(n)$.

Remarque 2.4 — On n'est pas obligé de commencer une récurrence à $n = 0$. On peut initialiser à n'importe quel entier n_0 mais alors ce que l'on démontré est

$$\forall n \geqslant n_0, \mathrm{P}(n).$$

Il est important d'appliquer ce principe avec soin :

1. On énonce bien ce qu'on démontre : on identifie $\mathrm{P}(n)$,
2. On prouve **l'initialisation** de la récurrence : on démontre $\mathrm{P}(0)$
3. On prouve **l'hérédité** suppose que $\mathrm{P}(n)$ est vraie et on démontre $\mathrm{P}(n+1)$
4. On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{P}(n)$.

Exemple 13 — ***Démontrer que*** $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Il y a d'autres types de récurrences possibles. La première est la récurrence double :

Théorème 3 | Principe de récurrence double

Soit $\mathrm{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier n. Supposons que
1. **[double initialisation]** $\mathrm{P}(0)$ et $\mathrm{P}(1)$ sont vraies
2. **[double hérédité]** quelque soit $n \in \mathbf{N}$, $(\mathrm{P}(n)$ et $\mathrm{P}(n+1) \implies \mathrm{P}(n+2).)$

Alors $\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{P}(n)$.

Exemple 14 — ***On considère la suite*** u_n ***définie par*** $u_0 = 1$***,*** $u_1 = 4$ ***et*** $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$***. Montrer que pour tout entier*** n***,*** $u_n = 2 \times 3^n - 2^n$

En dernier recours, un dernier principe de récurrence pour nous sauver.

Théorème 4 | Principe de récurrence forte

Soit $\mathrm{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier n. Supposons que
1. **[Initialisation]** $\mathrm{P}(0)$ est vraie
2. **[Hérédité forte]** quelque soit n, l'intersection des $\mathrm{P}(k)$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ implique $\mathrm{P}(n+1)$.

Alors $\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{P}(n)$.

Exemple 15 — ***Soit*** u_n ***la suite définie par*** $u_0 = 1$ ***et*** $u_{n+1} = u_0 + \cdots + u_n$***. Montrer que*** $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant 2^n$.