

Séries numériques

Dans tout ce chapitre, (u_n) et (v_n) sont des suites réelles, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Série numérique

Soit (u_n) une suite réelle. On appelle série de terme général u_n , que l'on note

$$\sum_{n>0} u_n \text{ ou } \sum u_n$$

la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Remarque 1.1 — La suite peut être définie à partir d'un certain rang n_0 , comme dans le cas $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ où la suite est définie à partir de 2. On note alors

$$\sum_{n \geq n_0} u_k.$$

Exemple 1 —

1. Pour (u_n) la suite constante égale à 1, la suite des sommes partielles est

$$S_n = n + 1.$$

2. Pour $u_n = n$, la suite des sommes partielles vaut

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. La **série harmonique** est la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Les sommes partielles n'ont pas d'expression sympathique à calculer. Les premiers termes valent

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, S_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

Définition 2 | Série convergente

On dit qu'une série est **convergente** si la suite S_n des sommes partielles converge. On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim S_n.$$

Cette quantité s'appelle la **somme de la série**.

Si une série est convergente, on peut définir le **reste de la série**. C'est la suite définie par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 1.2 — Si la série converge, on a $\lim R_n = 0$. Il est intéressant de trouver un équivalent de R_n , pour savoir à quelle vitesse la série converge.

Théorème 1

Si la série $\sum u_n$ converge alors

$$\lim u_n = 0.$$

Par contraposée, si u_n ne converge pas vers zéro, la série des u_n diverge. On dit qu'elle **diverge grossièrement**.



Attention

Il faut faire attention à la nature des objets! $\sum u_n$ est une suite alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est un nombre réel défini **uniquement** en cas de convergence de la suite.



Attention

On ne peut pas manipuler les sommes de séries **sans précaution** : sans avoir vérifié la convergence **des trois séries** on ne peut pas écrire des choses comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Par exemple, on verra que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, ainsi on ne peut



pas écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Théorème 2 | Combinaison linéaire de séries convergentes

Si les séries de termes général (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors toute combinaison linéaire des suites (u_n) et (v_n) fournit une série convergente. C'est à dire que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, la série de terme général $u_n + \lambda v_n$ est convergente. De plus la somme est donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Proposition 1

Soit λ un réel non nul et (u_n) une suite. La série de terme général u_n converge si et seulement la série de terme général λu_n converge. Si on a convergence alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exemple 2 — Calculer la somme de la série de terme général $\frac{1}{2^n} + \frac{3}{4^n} \dots$

2. SÉRIES DE RÉFÉRENCE**2.1. Série géométrique (et dérivées)****Définition 3 | Série géométrique**

La série géométrique de raison $q \in \mathbf{R}$ est la série $\sum_{n \geq 0} q^n$.

Théorème 3 | Convergence des séries géométriques

La série géométrique de raison q converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas là

$$\sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Preuve Si $q = 1$, la somme partielle vaut $n + 1$. Il est clair que cela diverge.

Soit alors $q \neq 1$. Le calcul de la somme partielle est explicite et donne

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

qui converge si et seulement si q^n converge ce qui est le cas si et seulement si $|q| < 1$ et alors $q^n \rightarrow 0$. Ceci donne aussi la valeur de la somme.

Corollaire 1

La série $\sum_{n \geq n_0}^{+\infty} aq^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors

$$\sum_{n \geq n_0}^{+\infty} aq^n = \frac{aq^{n_0}}{1 - q}.$$

Les séries géométriques dérivées sont aussi explicitement au programme.

Théorème 4

1. La série $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

2. La série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

On verra souvent apparaître ces séries là sous la forme suivante. Il est important de savoir les retrouver.

Corollaire 2

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$

2. $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3}$

Exemple 3 — Calculer la somme de la série de terme général $u_n = (5n^2 + 3n + 1)3^{-n}$.

2.2. Série de Riemann

Définition 4 | Série de Riemann

Soit $\alpha > 0$. Une série de Riemann est un série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Remarque 2.1 — La série harmonique est la série de Riemann pour $\alpha = 1$.

Théorème 5 | Convergence des séries de Riemann

La série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 2.2 — La démonstration ne permet pas de donner une valeur pour la série. On en connaît quelques unes par d'autres moyens comme les valeurs pour α un entier pair. Par exemple

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.3. Série exponentielle

Définition 5

Soit $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est appelée série exponentielle.

Théorème 6 | Convergence des séries exponentielles

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$ la série de exponentielle associée à x converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Remarque 2.3 — Ce théorème sera démontré dans le chapitre **Formules de Taylor**.

Exemple 4 — Soit $\lambda > 0$, calculer la somme de la série de terme général $p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

3. SÉRIES À TERMES POSITIFS, CONVERGENCE ABSOLUE

Proposition 2

Soit u_n une suite à termes positifs. On a l'alternative

1. la série $\sum u_n$ converge vers un réel positif
2. la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$.

Théorème 7 | Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Soient (u_n) et (v_n) des suites de réels positifs. Si (v_n) est une série convergente alors si $\forall n, u_n \leq v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Remarque 3.1 — Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors on garde la convergence de $\sum u_n$ mais on n'a plus forcément la comparaison des sommes.

Proposition 3

Soient deux séries à termes positifs telles qu'il existe $c > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang $u_n \geq cv_n$. Si la série de terme général v_n diverge vers $+\infty$, alors la série de terme général u_n aussi.

Théorème 8 | Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs

Soient (u_n) et (v_n) des suites de réels positifs. Si $u_n \sim v_n$ alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}.$$

Attention

Ce théorème ne s'applique sur des séries à termes positifs. Par exemple les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$$

sont de nature différente!

C'est une grosse erreur qui sera lourdement pénalisée à chaque fois.

Petite remarque, on peut remplacer **série positive** par **positive à partir d'un certain rang**.

Définition 6 | Série absolument convergente

La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Théorème 9

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque 3.2 — On remarque que toute série absolument convergente est la différence de deux séries de nombres réels convergente. En effet si u_n est une suite de nombres réels absolument convergente alors définissons pour tout n

$$v_n = \max(u_n, 0) \text{ et } w_n = -\min(u_n, 0).$$

En fait v_n vaut $|u_n| = u_n$ si $u_n \geq 0$, et 0 sinon; alors que $w_n = |u_n| = -u_n$ si $w_n \leq 0$, et 0 sinon.

Par construction, v_n et w_n sont suites de réels positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq |u_n| \text{ et } w_n \leq |u_n|.$$

Par critère de comparaison sur les séries positives, les séries de termes général v_n et w_n convergent. En présence uniquement de séries convergentes on peut alors calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n - w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

car

$$v_n - w_n = \max(u_n, 0) + \min(u_n, 0) = u_n.$$

Remarque 3.3 — Pour étudier certaines séries, on pourra commencer par chercher un équivalent de $|u_n|$ pour le comparer à une série connue :

- Si $|u_n|$ est équivalent à un terme d'une série convergente, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente
- Attention, on ne peut pas conclure si $|u_n|$ est équivalent au terme général d'une série divergente (sauf si u_n est toujours positif bien sûr). Par exemple, prenons $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On a $|u_n| = \frac{1}{n}$ mais la série est convergente.

Théorème 10 | Théorème de comparaison à une série à termes positifs

Soit (u_n) une suite réelle et (v_n) une suite à termes positifs. Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ est une série convergente alors $\sum u_n$ est une série convergente.

Remarque 3.4 — Théorème admis.

Corollaire 3 | Critère de Riemann pour les séries

Si $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$ avec $C \neq 0$. Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 5 — Étude de la série

$$\sum \frac{\sin(n^\alpha e^{-2n})}{1 - \cos(n^\beta e^{-n})}.$$

Remarque 3.5 — En pratique, on utilisera **très souvent** le théorème de comparaison à une série positive avec $v_n = \frac{1}{n^2}$: si on arrive à montrer que $n^2 u_n \rightarrow 0$, alors on aura prouvé la convergence de $\sum u_n$ (car $u_n = o(\frac{1}{n^2})$ qui est le terme général d'une série positive convergente).

Par exemple, si $u_n = n^{1000} e^{-n}$ alors $n^2 u_n = n^{1002} e^{-n}$ qui tend vers 0 par croissance comparée. Par comparaison avec $\frac{1}{n^2}$ on peut conclure que $\sum u_n$ converge.

Cela fonctionnerait avec tout $n^\alpha, \alpha > 1$.

Attention

Si $u_n = o(\frac{1}{n})$ on **ne peut pas conclure que $\sum u_n$ converge**. C'est une erreur classique et sévèrement sanctionnée. En effet ceci nous assure que la série des u_n est plus petite (en un certain sens) qu'une série divergente. Cela ne nous assure pas qu'elle converge, il faut qu'elle soit "assez plus petite". Par exemple

$$\sum \frac{1}{n \ln(n)} \text{ diverge}$$

$$\text{mais } \sum \frac{1}{n \ln(n)^2} \text{ converge.}$$

4. RETOUR SUR LES SOMMES TÉLESCOPIQUES.

Dans cette partie on fait le lien entre convergence de séries et convergence de suites. Le lien se fait par télescopage : on retiendra que toute limite de suite est la somme d'une série convergente et réciproquement.

Théorème 11

La suite (u_n) converge si et seulement si la série

$$\sum u_{n+1} - u_n \text{ converge.}$$

Au quel cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim u_n - u_0.$$

Lorsqu'on rencontrera une série télescopique, on se ramènera toujours aux sommes partielles qui sont des "vraies sommes télescopique".

Exemple 6 — En se ramenant à une série télescopique, montrer que la série $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et donner sa somme.

Fiche méthode - étudier une série

Quand on doit étudier une série, il faut être méthodique. On fera face à deux types de questions. On considère dans cette fiche une série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

QUESTION 1 : QUELLE EST LA NATURE DE LA SÉRIE ?

Étape 1 **La série diverge-t-elle grossièrement?** Si $\lim u_n \neq 0$, alors on peut conclure directement que la série diverge. Cela arrivera rarement dans les exercices. Si $\lim u_n = 0$, il faut continuer l'étude. **[Exercice 1]**

 **Attention (Pas de réciproque)**

$$\lim u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}$$

Étape 2 **Est ce que je reconnais une série usuelle?** Si oui, je peux en déduire immédiatement la nature et parfois la somme s'il y a convergence. Les séries usuelles sont :

- la série géométrique et ses dérivées (on connaît la somme),
- la série exponentielle (on connaît la somme)
- les séries de Riemann (on ne connaît pas la somme)

[Exercice 2]

Dans les cas suivants, on doit se poser la question du signe de u_n .

Étape 3 **Si la série est à termes positifs (ou l'est à partir d'un certain rang) :**

- on cherche un équivalent de u_n , on déduit la nature de $\sum u_n$ de la nature de la série de l'équivalent qui sera plus simple, par exemple une série de Riemann.

[Exercice 4]

- on peut utiliser un critère de comparaison de SATP soit pour montrer divergence vers $+\infty$, soit pour montrer convergence. **[Exercice 3]**
- si on repère une décroissance exponentielle dans la série, on peut utiliser le critère de négligeabilité en montrant que $n^2 u_n$ tend vers zéro

Étape 4 **Si la série change de signe est à termes positifs :**

- On utilise les critères de l'étape 3 avec la série de terme général $|u_n|$. Si la série est absolument convergente, on peut dire qu'elle converge! **[Exercice 6]**
- Penser au critère de négligeabilité si on a une décroissance exponentielle. Dans tous les cas, montrer que $n^2 u_n$ tend vers zéro suffit à montrer la convergence! **[Exercice 5]**

- Si on est vraiment bloqué, on peut chercher une série télescopique ...



Attention

Pour une série qui change de signe :

$|u_n|$ est équivalent au terme général d'une série divergente $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

QUESTION 2 : QUELLE EST LA SOMME DE LA SÉRIE

Cette question est plus compliquée, on n'a que quelques méthodes :

1. Reconnaître une série usuelle dont on connaît la somme. [Exercice 2]
2. Reconnaître une série télescopique : ce sera guidé. [Exercice 7]

QUELQUES EXERCICES CORRIGÉS

Exercice 1 Exemple de divergence grossière

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Corrigé. On sait que

$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim n \frac{1}{n} \sim 1$$

donc le terme général de la suite ne tend pas vers zéro. Donc la série diverge (grossièrement).

Exercice 2 Reconnaître une série usuelle "modifiée".

Déterminer la nature (et éventuellement la somme) de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{3^{n+1}}{n!}$.

Corrigé. Au brouillon : on reconnaît la forme d'une série exponentielle mais il y a un $n + 1$ à la place de n et il manque le terme $n = 0$. On réalise alors quelques opérations.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{3^{k+1}}{k!} &= 3 \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{k!} \\ &= 3 \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!} \right) \\ &= 3 \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right). \end{aligned}$$

Or on reconnaît une série exponentielle et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} = e^3$$

donc la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{n!} = 3(e^3 - 1).$$

Exercice 3 Utilisation du critère de comparaison pour une SATP Quelle est la nature de $\sum \frac{5}{5+n^2}$?

Corrigé. C'est une série de terme général positif u_n qui vérifie

$$u_n \leq \frac{5}{n^2}.$$

De plus la série $\sum_n \frac{5}{n^2}$ converge car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $\sum u_n$ converge.

Exercice 4 Utilisation du critère d'équivalence pour une SATP

Déterminer la nature de $\sum u_n$ avec $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 0$.

Corrigé. C'est une série à terme positifs et

$$u_n \sim n \frac{1}{n^\alpha}$$

car $\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0$. Donc $u_n \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série converge si et seulement si $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ par critère de Riemann. Donc la série converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 5 Utilisation du critère de négligeabilité pour montré une convergence de série.

Soit $u_n = \cos(n^2)2^{-n}n^2$. Montrer que la série de terme général u_n converge.

Corrigé. On remarque que $n^2 u_n = \cos(n^2)n^4 2^{-n}$ qui tend vers 0 par croissance comparé. Donc $u_n = o(1/n^2)$. Par négligeabilité devant une série de Riemann convergente, on déduit que la série converge.

Exercice 6 Utilisation de la convergence absolue. Démontrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Corrigé. Montrons que la série converge absolument. On a

$$\forall n \in \mathbf{N}, |u_n| = \left| \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$$

donc $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$. Donc la série de terme général $|u_n|$ converge par équivalence à une série de Riemann convergente car $2 > 1$. On en déduit que la série de terme général u_n converge par critère de convergence absolue.

Exercice 7 Calcule de la somme d'une série télescopique. Montrer que la série de terme général $u_n = \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ est convergente et calculer sa somme.

Corrigé. On remarque que pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \ln\left(\frac{n \times n}{(n-1)(n+1)}\right) = \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n) - \ln(n+1).$$

Ainsi la somme partielle vaut, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^N u_n &= \sum_{n=2}^N \ln(n) - \ln(n-1) + \sum_{n=2}^N \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \ln(N) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(N+1) \\ &= \ln(2) + \ln\left(\frac{N}{N+1}\right)\end{aligned}$$

qui tend vers $\ln(2)$ car $\frac{N}{N+1}$ tend vers 1. Ainsi la série converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \ln(2).$$