Thomas Cometx

CHAPITRE 24

Espaces probabilisés

Le but de chapitre est de généraliser ce que l'on a vu au premier semestre sur les probabilités dans un espace fini. Si nous nous concentrerons par la suite sur les probabilités à dans un espace dénombrable (comme $\mathbb{N}$), puis en deuxième année sur les probabilités continues, nous devons étudier ce cadre général qui nous fournira beaucoup de théorèmes utiles dans chacun des cadres particuliers.

1. ESPACES PROBABILISÉS

Définition 1 | Univers

L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers** et est noté Ω.

Exemple 1 —

1. Tous les exemples vus au premier semestre en probabilités finies fournissent des exemples.
2. Si l'expérience consiste au choix d'un nombre aléatoire uniforme dans $[0,1]$, alors $\Omega = [0,1]$.
3. On lance une pièce une infinité de fois et on regarde le résultat Pile ou Face. Dans ce cas $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans Pile/Face.

Définition 2 | Ensemble des événements

Pour étudier les variables aléatoires dans un cadre plus général que les probabilités finies, on doit définir un ensemble des événements. Celui ci est noté $\mathscr{A}$ et est un ensemble de parties de Ω. Il doit vérifier les propriétés suivantes :

1. $\Omega \in \mathscr{A}$,
2. **(Stabilité par passage au complémentaire)** Si $B \in \mathscr{A}$, alors $\overline{B} \in \mathscr{A}$,
3. **(Stabilité par union dénombrable)** Une union dénombrable d'événements est un événements : si $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un famille quelconque de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathscr{A}$.
4. **(Stabilité par intersection dénombrable)** : si $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de $\mathscr{A}$,

alors $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathscr{A}$.

Remarque 1.1 — Cette définition est atroce, mais ainsi est faite la dure vie d'un probabiliste.

Remarque 1.2 — Les probabilistes ont le droit d'appeler un ensemble de parties vérifiant ces propriétés une **tribu**, mais vous n'avez le droit.

Remarque 1.3 — Sur une note plus douce, on remarquera que $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ convient toujours. On travaillera souvent avec $\Omega = \mathbb{N}$ ou $\Omega = \mathbb{N}^*$, et dans ce cas c'est ce choix de $\mathscr{A}$ qui sera fait.

Définition 3 | Probabilité

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathscr{A}$ un ensemble d'événements. Une **probabilité** P est une application définie $\mathscr{A}$ et à valeur dans $[0, 1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. **(σ-additivité)** (sigma additivité) Si $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux disjoints alors
$$P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(B_i).$$

On retrouve les propriétés de calcul que l'ont avait sur les probabilités finies.

Proposition 1

1. Soit A un événement, alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. Soient A et B deux événements, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque 1.4 — Cela implique que si (A_n) est une suite d'événements,
$$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$
(où la somme de droite est éventuellement divergente vers $+\infty$).

Vocabulaire

On dit que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Exemple 2 — Montrer que si P est défini par $P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, alors $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), P)$ est un espace probabilisé. Déterminer $P(\{2n, n \in \mathbb{N}\})$ et $P(\{2n + 1, n \in \mathbb{N}\})$.

2. THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE ET CONSÉQUENCES

Le théorème suivant, et ses conséquences, seront très utiles pour démontrer certaines propriétés des expériences aléatoires. Dans cette partie on fixe $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Remarque 2.1 — Soit (A_n) une suite d'événements. On rappelle qu'elle est dite **croissante pour l'inclusion** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}.$$

Elle est dite **décroissante pour l'inclusion** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n.$$

Théorème 1 | Théorème de la limite monotone

1. Soit (A_n) une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n).$$

2. Soit (A_n) une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n).$$

On utilisera aussi les conséquences suivantes en exercice :

Corollaire 1

Soit (B_n) une suite d'événements, alors

1.

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)$$

2.

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right)$$

Remarque 2.2 — Les démonstrations de ces résultats ne sont pas exigibles, et l'esprit des concours est souvent plutôt de savoir les appliquer dans des contextes comme celui de l'exemple suivant.

Exemple 3 — On considère une expérience de lancers successifs d'une pièce qui s'arrêtent au premier Face obtenu. On compte le nombre de lancers faits avant de s'arrêter. On appelle A_n l'événement "obtenir un pile au n-ième lancer". Alors l'événement "obtenir une infinité de Pile" s'écrit $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$. Par le théorème de la limite monotone,

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k) &= \lim_{n\to+\infty} P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} P(A_k) \text{ par indépendance} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a ainsi une probabilité 0 de ne pas s'arrêter, donc une probabilité 1 de s'arrêter !

3. QUELQUES ÉVÉNEMENTS PARTICULIERS

Définition 4 | Événement négligeable

Un événement $A \in \mathscr{A}$ est dit **négligeable** si $P(A) = 0$.

Exemple 4 — Reprenons l'exemple du lancer infini de pièce : l'événement "obtenir une suite infinie de Pile" est négligeable car on a vu qu'il est de probabilité 0.

Proposition 2

Une union dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Définition 5 | Événement presque sûr

Un événement $A \in \mathscr{A}$ est dit **presque sûr** si $P(A) = 1$.

Proposition 3

Une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

Exemple 5 — On considère un lancer infini de Pile ou Face, alors l'événement "obtenir au moins un Pile et un Face" est presque sûr. En effet on note A_n l'événement "obtenir un pile au n-ième lancer, on a vu que

$$P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = 0.$$

De même on montre que

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}) = 0.$$

L'événement B "obtenir au moins un Pile et un Face" est l'événement contraire de

$$\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)$$

qui est de probabilité 0. Donc $P(B) = 1$.

Définition 6 | Propriété vraie presque sûrement

Soit Q une propriété dépendant de $\omega \in \Omega$. On dit qu'elle est **vraie presque sûrement** s'il existe un événement presque sûr A tel que si $\omega \in A$, alors $Q(\omega)$ est vraie.

4. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Définition 7 | Probabilité conditionnelle

Soit A un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque. Alors la probabilité conditionne $P_A(B)$ (qu'on lit "la probabilité de B sachant A" est donnée par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Proposition 4

Soit A un événement de probabilité non nulle, alors l'application

$$P_A : B \in \mathscr{A} \longmapsto P_A(B)$$

est une probabilité. Ainsi $(\Omega, \mathscr{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

Théorème 2 | Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_n$ un système complet d'événements non négligeables. Alors pour tout événement B on a

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B).$$

Exemple 6 — On lance une pièce jusqu'à obtenir un Pile. Si à la la fin, on a fait un nombre impaire de lancers, alors on a gagné. Sinon on lance un dès et on gagne si et seulement si on obtient six. Quelle est la probabilité de gain ?

Définition 8 | Événements mutuellement indépendants

Soit (A_n) une suite d'événements. On dit qu'ils sont **mutuellement indépendants** si pour tout sous ensemble $J \subset \mathbb{N}$,

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Remarque 4.1 — En particulier, cela implique que si les (A_n) sont mutuellement indépendants,

$$P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$