Thomas Cometx

CHAPITRE 25

Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ est un espace probabilisé.

1. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Définition 1 | Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire discrète (réelle) est une fonction $X : \Omega \to \mathbf{R}$ telle que
1. $X(\Omega) = \{u_i, i \in I\}$ où I est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{N}$ (on dit que la variable aléatoire prend un nombre dénombrable de valeurs),
2. pour tout $i \in I$, $[X = u_i]$ est un événement de $\mathscr{A}$.

Exemple 1 — $X(\Omega)$ peut être par exemple :

1. un ensemble fini (comme au premier semestre),
2. $\mathbb{N}$,
3. l'ensemble des valeurs d'une suite quelconque.

Remarque 1.1 — Si X est une variable aléatoire, alors pour tout sous-ensemble $J \subset X(\Omega)$ on obtient rapidement que $[X \in J]$ est un événement. En effet :

$$[X \in J] = \cup_{j \in J} [X = j].$$

$[X \in J]$ a donc été écrit comme une union (au plus) dénombrable d'événements : c'est donc un événement. Il en découle directement que si par exemple $X(Omega) = \mathbf{N}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, les ensembles $[X \leqslant n]$, $[X < n]$, $[X^2+1 > n]$ sont par exemple des événements. Pour s'en convaincre, on se rend compte que le premier correspond à $J = [\![0, n]\!]$.

Définition 2 | Loi d'une VA discrète

La loi d'une VA discrète X est la donnée des probabilités $P(X = x)$ pour $x \in \Omega$.

Définition 3 | Fonction d'une VA

Si g est une fonction définie sur $X(\Omega)$ alors $Y = g(X)$ est la variable aléatoire définie par $Y(\omega) = g(X(\omega))$.
On a $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et la loi de Y est donnée pour tout $y \in g(X)$ par

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega), g(x)=y} P(X = x).$$

Exemple 2 — ***Soit** X **la VA définie par** $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ **et pour tout** $n \in \mathbf{N}^*$**,** $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$**. On définit** $Y = \frac{(-1)^X+1}{2}$**. Donner la loi de** Y**.***

On identifie ici la fonction $g : x \mapsto \frac{(-1)^x+1}{2}$. On a $Y = g(X)$.

1. Déterminons d'abord $Y(\Omega)$: si X est pair, $Y = 1$ et si X est impair, $Y = 0$. Donc $Y(\Omega) = \{0, 1\}$. On peut déjà en déduire que Y suit une loi de Bernoulli.
2. Déterminons pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y)$. Il suffit ici de calculer $P(Y = 1)$. On a :

$$\begin{aligned}
P(Y = 1) &= \sum_{x \in X(\Omega), g(x)=1} P(X = x) \\
&= \sum_{n \geq 1, g(n)=1}^{+\infty} P(X = n) \\
&= \sum_{n \geq 1, n \text{ pair}}^{+\infty} P(X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$ et donc $P(Y = 0) = \frac{2}{3}$. On en déduit que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{1}{3})$.

Définition 4 | VA discrète indépendantes

Des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), P(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

Attention

Cette condition est plus forte que la condition "les variables sont indépendantes deux à deux" définie par : si $i \neq j$ alors pour tout $(x_i, x_j) \in X_i(\Omega) \times X_j(\Omega)$,

$$P([X_i = x_i] \cap [X_j = x_j]) = P(X_i = x_i) \times P(X_j = x_j).$$

Exemple 3 — Soient X, Y deux variables aléatoires de Rademacher indépendantes, alors X, Y et XY sont deux à deux indépendantes, mais pas mutuellement indépendantes.

Proposition 1

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors pour tout $(J_1, \ldots, J_n)$ n-uplet de sous-ensembles respectifs de $X_1(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in J_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in J_i).$$

Exemple 4 — Si pour tout i, $X_i(\Omega) = \mathbb{N}$, alors pour tout $m_1, \ldots, m_n$ des entiers naturels,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant m_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant m_i).$$

Ici, $J_i = \{0, \ldots, m_i\}$.

2. ESPÉRANCE D'UNE VA DISCRÈTE

Contrairement au cas des variables aléatoires finies, l'existence de l'espérance n'est pas acquise ici.

Définition 5 | Espérance d'une VA discrète

On dit que X admet une espérance si la série

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

est absolument convergente. On définit alors l'espérance de X par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Remarque 2.1 —

1. Par la formule de transfert (voir plus loin), cela revient à dire que $|X|$ admet une espérance car l'absolue convergence de la série s'écrit
$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < +\infty.$$
2. L'absolue convergence assure ici que la somme peut se faire dans n'importe quel ordre donné sur les x (admis).

Théorème 1 | Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux VA discrètes sur un même espace probabilisé qui admettent un espérance, et si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, alors $aX + bY$ admet une espérance et
$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Théorème 2 | Croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux VA discrètes sur un même espace probabilisé qui admettent un espérance, et si $X \leqslant Y$,
$$E(X) \leqslant E(Y).$$

Théorème 3 | Existence d'une espérance par domination

Si X et Y sont deux VA discrètes sur un même espace probabilisé telles que :
- $|X| \leqslant Y$
- Y admet une espérance

alors X admet une espérance et $|E(X)| \leqslant E(Y)$.

Remarque 2.2 — Théorème admis.

Remarque 2.3 — On a aussi un inégalité triangulaire
$$|E(X)| \leqslant E(|X|).$$

Théorème 4 | Théorème de transfert

Soit X une VA discrète et g une fonction sur $X(\Omega)$. Alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série
$$\sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x)$$

est absolument convergente. Dès lors

$$E(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

Remarque 2.4 —

1. L'absolue convergence assure que la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation.
2. Théorème admis.

Exemple 5 — ***Soit*** X ***la variable aléatoire définie par*** $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ***et*** $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{1}{en!}$***. On définit*** $Y = (-2)^X$***. Montrer que*** Y ***admet une espérance et la calculer.***

1. On montre que Y admet une espérance en montrant que la série $\sum_{x\in X(\Omega)} (-2)^X P(X = x)$ converge **absolument**. Cela revient à montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|(-2)^n|}{en!} \text{ converge.}$$

   C'est bien le cas car on reconnait une série exponentielle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{en!} = \frac{e^2}{e} = e.$$

   La variable aléatoire Y admet donc une espérance.
2. On calcule alors l'espérance

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{en!} = \frac{e^{-2}}{e} = e^{-3}$$

   car on reconnaît une série exponentielle. Ainsi $E(Y) = e^{-3}$.

Remarque 2.5 — On doit, sauf cas particulier, montrer l'existence de l'espérance avant et à part du calcul. Cela doit bien être explicite sur la copie. Le seul cas où c'est facultatif est si on obtient une série à terme positif. Il faut alors le signaler et dire explicitement que c'est pour cette raison qu'on peut faire un seul calcul.

3. VARIANCE, MOMENTS

Définition 6 | Moment d'une VA

X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si X^r admet une espérance. Le moment d'ordre r de X est alors $E(X^r)$.

Proposition 2

Si X admet un moment d'ordre r alors X admet un moment d'ordre k pour tout $k \in [0, r]$.

Remarque 3.1 — Si X est une variable aléatoire bornée alors elle admet des moments d'ordre r pour tout $r \in \mathbf{N}^*$ car soit $M > 0$ tel que pour tout $|X| \leqslant M$ alors $|X^r| \leqslant M^r$ et la variable constante M^r admet une espérance. Donc par domination X^r admet une espérance.

Définition 7 | Variance d'une VA discrète

Soit X une variable aléatoire qui admet une espérance, alors si $(X-E(X))^2$ une espérance on dit que X admet une variance. Celle-ci est définie par

$$V(X) = E[(X-E(X))^2].$$

Théorème 5 | Formules de Huygens-Koenig

Soit X une VA discrète, alors X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance (ou si X admet un moment d'ordre 2). Alors on a la formule de Huygens-Koenig :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Définition 8 | Écart-type

Si X admet une variance, alors on écart-type est défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 3

Si X admet une variance alors $aX + b$ aussi (avec $a, b \in \mathbf{R}$) et

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

Définition 9 | Variable centrée, réduite

Soit X une VA discrète, on dit que :

1. X est centrée si elle admet une espérance et que $E(X) = 0$,
2. X est réduite si elle admet une variance et que $V(X) = 1$.

Exemple 6 — Si X admet un moment d'ordre 2, alors $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

Proposition 4

Soit X une VA discrète

$$V \text{ admet une variance et } V(X) = 0 \iff X \text{ est constante.}$$

4. INTRODUCTION À LA FONCTION DE RÉPARTITION

Définition 10 | Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

La fonction de répartition vérifie quelques propriétés

Proposition 5 | Fonction de répartition de d'une VA discrète

Si F_X est la fonction de répartition d'une VA discrète X alors :

1. F_X est croissante
2. F_X est continue et constante par morceaux. Les points de discontinuités sont les points de $X(\Omega)$.
3. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Remarque 4.1 — La simulation de variables aléatoires en utilisant la fonction de répartition a été vue en TP.

Définition 11 | Fonction de répartition - version discrète

Pour une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}$, on utilisera souvent une **fonction de répartition discrète** définie par

$$F_X(n) = P(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).$$

Méthode *(Lien fonction de répartition discrète - probabilité)*

Dans certains cas, la fonction de répartition discrète sera plus facile à calculer que la probabilité elle même. On retiendra absolument le lien

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(X \leqslant n) - P(X \leqslant n-1) \\ &= F_X(n) - F_X(n-1). \end{aligned}$$

5. LOIS USUELLES

5.1. Retour sur la VA certaine

On rappelle que qu'une VA certaine X est définie par :

- $X(\Omega) = \{x_0\}$ pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$,
- $P(X = x_0) = 1$.

Ainsi sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < x_0 \\ 1 \text{ si } x \geqslant x_0. \end{cases}$$

5.2. Retour sur la VA de Bernoulli

On rappelle que qu'une VA de Bernoulli X est définie par :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
- $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

5.3. Loi géométrique

Définition 12 | Loi géométrique

On dit qu'une VA X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$.

Remarque 5.1 — La loi géométrique de paramètre 1 et une loi certaine (VA constante étale à 1). La loi géométrique de paramètre 0 n'a pas de sens et pas d'intérêt.

Remarque 5.2 — La loi géométrique est la loi du rang d'apparition du premier succès dans une épreuve de Bernoulli sans mémoire.

Notation

On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Proposition 6 | Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ pour $p \in [0,1]$, alors X admet une espérance et une variance. On a :
1. $E(X) = \frac{1}{p}$,
2. $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Proposition 7 | Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_X(n) = P(X \leqslant n) = 1 - (1-p)^n.$$

5.4. Loi de Poisson

Définition 13 | Loi de Poisson

On dit qu'une VA X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Remarque 5.3 — La loi de Poisson modélise le nombre d'événements qui se passent dans un intervalle de temps fixé, si on suppose que

- la fréquence d'arrivée de l'événement est connue
- les occurrences de ces événements sont indépendantes.

Par exemple, si en moyenne les clients d'un supermarché arrivent en caisse avec une fréquence de 1 minutes, le nombre de clients qui arrivent dans un intervalle de temps d'une heure (soit 60 minutes) sera modélisé par une loi de Poisson de paramètre 60.

Notation

On note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Proposition 8 | Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$, alors X admet une espérance et une variance. On a :

1. $E(X) = \lambda$,
2. $V(X) = \lambda$.