CHAPITRE 28

Applications linéaires et endomorphismes

Dans tout le chapitre, E, F, et G sont des espaces vectoriels.

1. CAS GÉNÉRAL

1.1. Définitions

Définition 1 | Applications linéaires

Une **application linéaire de** E **dans** F est une application u de E dans F qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

On remarque que que la condition est remplaçable par la combinaison des deux conditions :
1. $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, u(x+y) = u(x) + u(y)$
2. $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbf{R}, u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

Remarque 1.1 — La définition implique immédiatement que

$$u(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}.$$

Notation

On note $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 1 —

1. L'application nulle, notée $0_{\mathscr{L}(E,F)}$ est l'application définie pour tout $x \in E$ par $u(x) = 0_F$.
2. Si $E = F = \mathbf{R}$, on retrouve les **fonctions linéaires** : $f(x) = ax$.

Exemple 2 — ***Identité, homothéties***

1. Si $E = F$, l'application définie par
$$\forall x \in E, u(x) = x$$
est **l'application identité de** E ou **l'identité sur** E. On la note Id_E.
2. C'est un cas particulier des applications de la forme
$$\forall x \in E, u(x) = \lambda x$$
pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Ces applications s'appellent les **homothéties**. λ est appelé le rapport de l'homothétie.

Exemple 3 — Soit $M \in M_{n,p}(\mathbf{R})$, l'application u de $E = M_{n,1}(\mathbf{R})$ dans $F = M_{p,1}(\mathbf{R})$ définie par
$$\forall X \in E, u(X) = MX$$
est une application linéaire. En effet :

- Si $X \in E$, on a bien $Y \in F$.
- $$M\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$
- $$\forall (X, Y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R} : u(X + \lambda Y) = M(X + \lambda Y) = MX + \lambda MY = u(X) + \lambda u(Y).$$

Exemple 4 — Soit $n \geqslant 1$. Si $E = \mathbf{R}_n[x]$ et $F = \mathbf{R}_{n-1}[x]$, et u est définie par $u(P) = P'$.

- Si $P \in E$, on a $\deg(P) \leqslant n$ et donc $\deg(P') \leqslant n - 1$ donc u est bien à valeurs dans F.
- Si $P = 0$, on a bien $u(P) = P' = 0$.
- Soient P et Q dans E et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $u(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$.

Ainsi $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Proposition 1

$\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Autrement dit, si u et v sont des applications linéaires de E dans F, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + \lambda v$ aussi.

Proposition 2 | Composée de deux applications linéaires

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
Autrement dit, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

Proposition 3 | Distributivité de la composition par rapport à l'addition

Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, $g_1, g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ et λ, μ des réels alors

$$(f_1 + \lambda f_2) \circ (g_1 + \mu g_2) = f_1 \circ g_1 + \mu f_1 \circ g_2 + \lambda f_2 \circ g_1 + \lambda\mu f_2 \circ g_2.$$

Définition 2 | Isomorphisme

Une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est un **isomorphisme** s'il existe $v \in \mathscr{F},\mathscr{E}$ tel que

$$v \circ u = \mathrm{I}d_E \text{ et } u \circ v = \mathrm{I}d_F.$$

On appelle alors v l'isomorphisme **inverse ou réciproque** de u.

Proposition 4

L'inverse d'une application linéaire, s'il existe, est unique.

Notation

L'inverse d'un isomorphisme u se note u^{-1}.

Exemple 5 — Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, alors l'homothétie de rapport λ est un isomorphisme si et seulement si $\lambda \neq 0$. Son inverse est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Théorème 1

Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle est injective et surjective.

Vocabulaire

S'il existe un isomorphisme entre E et F on dit qu'ils sont **isomorphes.**

Proposition 5

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on a l'équivalence entre
1. $\dim(E) = n$,
2. il existe un isomorphisme entre E et $M_{n,1}(\mathbf{R})$.

L'isomorphisme est donné par l'application coordonnées dans une base fixée.

1.2. Noyau et image d'une application linéaire

Définition 3 | Noyau d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. **Le noyau de** u, noté $\mathrm{Ker}(u)$, et l'ensemble défini par

$$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E, u(x) = 0_F\}.$$

Proposition 6

Soit u un endomorphisme de E dans F, alors le noyau de u est un sous-espace vectoriel de E.

Méthode *(Déterminer le noyau d'une application linéaire)*

On sait qu'on a toujours $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(u)$. Pour obtenir $\mathrm{Ker}\, u$ on raisonne par équivalence : pour trouver une caractérisation des éléments du noyau ou même une base.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(u) &\iff u(x) = 0 \\ &= \dots \end{aligned}$$

Proposition 7

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on a

$$u \text{ est injective} \iff \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}.$$

Méthode *(Montrer qu'une application linéaire est injective)*

Pour montrer qu'une application linéaire est injective, on peut :

1. Suivre la démonstration de la méthode précédente, obtenir
$$x \in \mathrm{Ker}(u) \iff x = 0_E.$$
2. Raisonner par implication et montrer que
$$x \in \mathrm{Ker}(u) \Rightarrow x = 0_E.$$
Cela donne l'inclusion
$$\mathrm{Ker}\, u \subset \{0_E\}.$$

Comme on a toujours l'inclusion réciproque on a alors égalité.

Définition 4 | Image d'une application linéaire

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on définit l'image de u par

$$\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = u(x)\}.$$

Proposition 8

$\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 9

u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(u) = F$.

Méthode *(Montrer qu'une application linéaire est surjective)*

Pour montrer qu'une application linéaire est surjective :

1. soit pour tout $y \in F$ fixé quelconque, on montrer qu'il admet un antécédent $x \in E$ par u,
2. si on a une base de F, $B = (f_1, \dots, f_n)$, on montre que tout élément de B admet un antécédent par u.

1.3. Cas des endomorphismes

Définition 5 | Endomorphisme

Si $u \in \mathscr{L}(E, E)$, on dit que u est un **endomorphisme de** E. Par simplicité, note plutôt $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphisme de E.

Proposition 10

$\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel.

Attention

En général on n'a pas si $f \circ g = g \circ f$ si f et g sont des endomorphisme de E. Si c'est le cas, on dit que f et g **commutent**.

Si u est un endomorphisme, alors on peut composer autant de fois u avec lui même que l'on veut, cela restera une application linéaire de E dans lui même.

Définition 6 | Puissances d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, alors on définit les puissances de u par :
- $u^0 = \mathrm{I}d_E$,
- pour $n \in \mathbf{N}^*$, par récurrence $u^{n+1} = u \circ u^n$ ou encore
$$u^n = u \circ \ldots \circ u \text{ avec } n \text{ fois l'endomorphisme } u,$$
- si u est un isomorphisme et si $n < 0$,
$$u^n = (u^{-1})^{-n}.$$

Exemple 6 — Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ et u l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbf{R})$ défini par $u(X) = MX$.

1. Déterminer les puissances positives de u.
2. Montrer que u est inversible si et seulement si M est inversible.
3. Dans ce cas là, déterminer les puissances négatives de u.

Exemple 7 — Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ définie par $u(P) = P(x+1)$. Déterminer les puissances de u.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on peut considérer ses puissances qui seront encore dans $\mathscr{L}(E)$. On peut aussi additionner ces puissances et les multiplier par des scalaires et rester dans $\mathscr{L}(E)$ car c'est un espace vectoriel. On en déduit qu'on peut prendre un polynôme en u.

Définition 7 | Polynôme d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbf{R}[x]$. On peut définir un le polynôme d'endomorphisme $P(u)$ par
$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k u^k \text{ où}$$
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k.$$

Exemple 8 — Déterminer $P(u)$ pour u l'endomorphisme de multiplication par une matrice carrée M.

Définition 8 | Polynôme annulateur d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[x]$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de u (ou que P annule u) si $\mathrm{P}(u)$ est l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

Exemple 9 — Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de $u \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_{2,1}(\mathbf{R}))$ défini par $u(\mathrm{X}) = \mathrm{MX}$. En déduire u^{-1}.

Théorème 2

Si un endomorphisme u admet un polynôme annulateur P tel que $\mathrm{P}(0) \neq 0$, alors u est un isomorphisme de E et son inverse est donné par un polynôme en A. Plus précisément, si $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ avec $\mathrm{P}(0) = p_0 \neq 0$, alors on a

$$u^{-1} = -\frac{1}{p_0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} u^k\right).$$

Remarque 1.2 — La formule précédente n'est pas à retenir, mais il faut savoir la retrouver. Par exemple si $\mathrm{P}(x) = x^2 - 4x + 2$ convient, alors

$$u^2 - 4u + 2\mathrm{I}d = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

donc

$$u^2 - 4u = -2\mathrm{I}d$$

donc

$$u \circ (u - 4\mathrm{I}d) = -2\mathrm{I}_d$$

donc

$$u \circ (-\frac{1}{2}u + 2\mathrm{I}_d).$$

Ainsi u est inversible et $u^{-1} = -\frac{1}{2}u + 2\mathrm{I}_d$.

Théorème 3 | Binôme de Newton pour des endomorphismes qui commutent

Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}.$$

1.4. Projecteurs associés à une somme directe

Dans cette-sous partie, on étudie une famille particulière d'endomorphisme qu'on appelle les projecteurs. C'est les endomorphismes qui admettent le polynôme $x^2 - x$ comme polynôme annulateur. On en voit plusieurs caractérisations.

Définition 9 | Projecteur associé à une somme directe

Si E se décompose comme la somme directe $E = F \oplus G$, alors le projecteur sur le sous-espace vectoriel parallèlement à G est l'application linéaire p définie par

$$\forall x \in E, p(x) = x_F \text{ où}$$

on a décomposé $x = x_F + x_G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemple 10 — Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ défini par

$$u((x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Montrer que c'est un projecteur et déterminer les sous-espaces vectoriels à laquelle il est associé.

Proposition 11

Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{Ker}(p) = G$ et $\mathrm{Im}(p) = F$.

Théorème 4 | Caractérisation des projecteurs

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$, alors p est le projecteur associé à une somme directe si et seulement si $p^2 = p$.

Proposition 12

Soit p un projecteur, alors $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{I}d_E)$.

Remarque 1.3 — Après avoir prouvé qu'un endomorphisme est un projecteur, on cherchera souvent la somme directe à laquelle il est associé en cherchant son noyau et son image (parfois à l'aide de la proposition précédente).

2. CAS DE LA DIMENSION FINIE

Dans cette partie, E est un espace vectoriel **de dimension finie**.

2.1. Dimension de L(E,F)

Théorème 5 | Dimension de L(E,F)

Si E et F sont de dimension finie, alors $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ aussi et

$$\dim \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \dim \mathrm{E} \times \dim \mathrm{F}.$$

En particulier, si $\dim(\mathrm{E}) = n$, alors

$$\dim \mathscr{L}(\mathrm{E}) = n^2.$$

Remarque 2.1 — Ce résultat sera prouvé dans le chapitre suivant.

2.2. Rang d'une application linéaire

Parmi tous les résultats techniques de ce chapitre, on n'oubliera pas celui-ci, qui découle directement des définitions.

Proposition 13

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors

$$(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \text{ est une famille génératrice de } \operatorname{Im} f.$$

Autrement dit,

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Remarque 2.2 — Cette famille ne sera pas forcément une base car elle ne sera pas forcément libre. Cependant, on pourra en extraire une base de l'image en retirant les vecteurs redondants.

Définition 10 | Rang d'une application linéaire

Le **rang** de l'application linéaire f est la dimension de $\operatorname{Im}(f)$. On le note $\operatorname{rg} f$.

Remarque 2.3 — Ce sera donc le cardinal d'une famille libre maximale dans $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Exemple 11 — Déterminer une famille génératrice de l'image de

$$u : X \in M_{3,1}(\mathbf{R}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X.$$

Méthode ***(Déterminer l'image et le rang d'une application linéaire en dimension finie)***

On signale que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de l'image. On en extrait une **base** de l'image par les méthodes du premier semestre :

1. Si la famille est libre, il n'y a rien a faire, on a déjà une base.
2. Sinon, on retire des vecteurs un par un jusqu'à obtenir une famille libre et génératrice.

Le rang est alors le cardinal de la famille obtenue.

Exemple 12 — Reprendre l'exemple précédent et déterminer le rang et une base de l'image de f.

2.3. Formule du rang et conséquences

Théorème 6 | Formule du rang

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors

$$\dim E = \operatorname{rg}(f) + \dim \operatorname{Ker} f.$$

Remarque 2.4 — Ce théorème est un des plus importants de l'année. Il conviendra de :

1. savoir, bien sûr, le citer **précisément**,
2. savoir reconnaître rapidement les circonstances où il est utile,
3. maîtriser les applications classiques que l'on va citer maintenant et savoir les utiliser rapidement.

Méthode *(Obtenir le rang d'un endomorphisme en dimension finie par le calcul du noyau)*

On calcule comme précédemment le noyau de l'endomorphisme, puis à l'aide de la formule du rang cela donne le rang.

Application à la caractérisation des isomorphismes

Proposition 14

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils sont de même dimension.

Théorème 7

Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. f est un isomorphisme,
2. f est injectif,
3. f est surjectif.

Remarque 2.5 — Quand on étudiera une telle application linéaire, en particulier dans le cas des endomorphismes, on aura bien à l'esprit ce théorème. Pour prouver l'isomorphisme il suffira de prouver l'injectivité (ce sera souvent le plus simple, mais pas à chaque fois), ou la surjectivité.

Exemple 13 — Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ inversible. Montrer que l'application $u : X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \to MX$ est injective. En déduire qu'elle est surjective.

Pour conclure, le théorème suivant sera souvent utile.

Théorème 8 | Caractérisation de propriétés par l'image d'une base

Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors :
1. u est injective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est libre,
2. u est surjective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est libre,
3. u est bijective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base.

Application à l'étude des formes linéaires.

Définition 11 | Forme linéaire

Une **forme linéaire** est une application est une application linéaire de E dans $\mathbf{R}$.

Exemple 14 — ***Formes coordonnées*** Soit $E = \mathbf{R}^n$, alors l'application ϕ_i définie par $\phi_i(x) = x_i$ est une forme linéaire appelée forme linéaire coordonnée.

Exemple 15 — Soit $E = \mathbf{R}^n$ alors toute application ϕ définie par

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

est une forme linéaire.

Vocabulaire ***(Hyperplan)***

Dans un espace vectoriel de dimension n, un **hyperplan** est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Théorème 9

Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. C'est à dire que si $f \in \mathscr{L}(E, \mathbf{R})$ est une forme linéaire non nulle,

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - 1$$

Exemple 16 —

1. Dans $\mathbf{R}^3$, quel est la dimension de

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y + z = 0\}.$$

2. Après avoir montré que c'est un espace vectoriel, donner la dimension

$$F = \{M \in M_n(\mathbf{R}) : \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = 0\}.$$

Définition 12 | Trace d'une matrice

La trace d'une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est définie par

$$\operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

Théorème 10 | Propriétés de la trace

L'application $\operatorname{Tr} : M \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto \operatorname{Tr}(M)$ est une forme linéaire. De plus elle vérifie :

1. $\forall M \in M_n(\mathbf{R}), \operatorname{Tr}({}^tM) = \operatorname{Tr}(M)$,
2. $\forall (A, B) \in M_n(\mathbf{R})^2, \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.