Thomas Cometx

CHAPITRE 30

Optimisation

Dans ce chapitre, nous serons à la recherche d'extrema de fonctions réelles définies sur des intervalles. Nous serons amenés à distinguer deux cas : l'étude des fonctions sur un segment et l'étude des fonctions définies sur des intervalles ouverts. Dans tous les cas, les fonctions étudiées seront de classe C^1.

On rappelle le théorème suivant.

Théorème 1 | Théorème des bornes atteintes

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. f admet un minimum et un maximum sur $[a,b]$.

Mais maintenant, comment trouver les points où ces extrema sont atteints ? On voit qu'il va y avoir essentiellement deux cas. Regardons deux exemples très simples.

Exemple 1 — Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x$. La fonction est strictement croissante, son maximum est donc atteint en 1 et son minimum en 0.

Exemple 2 — Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = (x-\frac{1}{2})^2$. L'étude de la fonction montre qu'elle est strictement décroissante jusqu'à $\frac{1}{2}$ puis strictement croissante jusqu'à 1. Or $f(0) = f(1) = \frac{1}{4}$ et $f(\frac{1}{2}) = 0$ donc f atteint son minimum en $\frac{1}{2}$ (c'est 0) et son maximum, $\frac{1}{4}$ en 0 et 1.

Remarque 0.1 — Ce théorème est faux dès que l'on regarde une fonction sur un intervalle ouvert. Par exemple, on sait déjà que la fonction tangente n'a ni maximum ni minimum sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Avant d'aller plus loin, il faut distinguer ce qu'on appelle un extremum global d'une extremum local. On connaît déjà la notion d'extremum global, la notion locale est définie de la façon suivante.

Définition 1 | Extremum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet un extremum local en $x \in \mathrm{I}$ si $f(x)$ est un extremum de f sur un ensemble de la forme

$$\mathrm{I} \cap]x-\epsilon, x+\epsilon[\text{(pour un certain } \epsilon > 0.)$$

Sur un intervalle, on a un **condition nécessaire** d'existence d'une minimum.

Théorème 2 | Condition nécessaire d'existence d'un extremum local

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} =]a, b[$. Si f admet un extremum local en $x \in \mathrm{I}$, alors $f'(x) = 0$.

Remarque 0.2 — Ce théorème est faux sur un intervalle qui n'est pas ouvert. Il suffit de reprendre l'exemple $f : x \in [0,1] \mapsto x$.

Définition 2 | Point critique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que $x \in \mathrm{I}$ est un point critique de f si $f'(x) = 0$.

Si en plus f est de classe C^2, on a un critère suffisant d'existence d'extremum local.

Théorème 3 | Condition suffisante d'existence d'un extremum local

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} =]a, b[$. Soit x un point critique de f. Si $f''(x) \neq 0$ alors f admet un extremum local en x.

Méthode *(Comment trouver les extrema d'une fonction ?)*

Cas 1. I est un intervalle ouvert.

1. on cherche les points critiques en résolvant $f'(x) = 0$
2. on cherche si ce sont des extrema locaux en regardant le signe de $f''(x)$
3. si de plus on veut vérifier si la fonction a des extrema globaux, on compare les extrema locaux obtenus aux limites de la fonction.

Cas 2. $\mathrm{I} = [a, b]$**.**

1. On sait que f admet des extrema globaux
2. On cherche les extrema locaux de f sur $]a, b[$ en utilisant le cas précédent
3. S'il n'y en a pas, on sait que les extrema globaux sont aux bornes. S'il y en a, on compare les extrema locaux on bornes pour déterminer où sont les extrema globaux.

Cas 3. Si f est semi-ouvert. On fait l'étude de f sur l'intérieur de l'intervalle comme au Cas 1. On compare les éventuels extrema locaux à la borne finie et l'éventuelle limite pour conclure sur l'existence d'extrema globaux ou pas.