Thomas Cometx

CHAPITRE 9

Étude globale des fonctions continues

1. DÉFINITIONS

Dans cette partie, f est une fonction continue sur un intervalle I.

Définition 1 | Fonction continue en un point, sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x \in$ I, on dit que f est continue en x si et seulement si la limite de f en x existe et est égale à $f(x)$. Si f est continue en x pour tout $x \in$ I, on dit que f est continue sur I.

Remarque 1.1 — On peut aussi dire que f est continue sur une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle (comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$). Mais attention dans ce cadre, certains théorèmes de ce chapitre **ne seront pas valables.**

Remarque 1.2 — Pour la continuité **en un point**, on a parlé au chapitre précédent de continuité à gauche et à droite. De la même façon on pourra dire qu'une fonction est continue à gauche ou continue à droite sur un intervalle. Cela fait parties des propriétés intéressantes notamment en probabilités.

Théorème 1 | Continuité des fonctions usuelles

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$,
2. Les fonctions rationnelles (quotients de polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition,
3. Les fonctions trigonométriques (cos, sin, tan) sont continues sur leur ensemble de définitions,
4. Il découlera du **théorème de la bijection réciproque** que la fonction arctangente est continue sur $\mathbb{R}$,
5. Le fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$,
6. La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}_+$,
7. Les fonctions exponentielles ($x \mapsto a^x$) (pour $a > 0$) sont continues sur $\mathbb{R}$,

8. Les fonctions puissances ($x \mapsto x^a$) (pour $a > 0$) sont continue sur $\mathbb{R}_+$. En particulier les fonctions racines carrées, cubiques, etc, le sont aussi.
9. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$,
10. La fonction partie entière est continue $\mathbb{R} \backslash \mathbb{R}$. Elle discontinue en les entiers, mais elle reste continue à gauche sur $\mathbb{R}$.

Preuve On verra dans un chapitre ultérieur qu'une fonction dérivable est forcément continue. Cela suffit à prouver ce théorème.

Théorème 2 | Théorèmes généraux de continuité

Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues sur leur ensemble de définition.

Preuve En utilisant les tableaux et théorèmes sur les limites.

Exemple 1 — Donner l'ensemble de définitions des fonctions

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \text{ et } g : x \mapsto \exp(\tan(x)).$$

Justifier leur continuité.

Méthode *(Expliquer, démontrer, justifier la continuité d'une fonction)*

On a deux cas principaux : **Cas 1 :** Si la fonction est définie par une formule simple sur tout son ensemble de définition, on justifie sa continuité en invoquant le théorème sur les sommes, composées, produits, quotients de fonctions continues usuelles.

Cas 2 : La fonction est définie par une formule simple sauf en quelques points : on explique par les théorèmes généraux que la fonction est continue sauf en un nombre simple de points. Ensuite on étudie la continuité aux points compliqués, comme les points de raccordement, en utilisant les théorèmes du chapitre précédent.

Exemple 2 — Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x > 0 \\ \cos(x) \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Solution. f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par continuité des fonctions cos et exp. Il nous reste à vérifier si la fonction est continue en 0. Pour cela on calcule les limites de f à gauche et à droite de 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(x) = \cos(0) = 1 = f(0).$$

Comme

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0),$$

on conclut que f est continue en 0. f est donc continue sur $\mathbb{R}$ entier.

Attention

Si la fonction est définie avec une formule différente à gauche et à droite d'un point : il faut **toujours** vérifier la continuité en ce point. Dans l'exemple précédent, la formule

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x > 0 \\ \cos(x) \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

ne permet pas de conclure la continuité sur $\mathbb{R}_-$ mais que sur $\mathbb{R}_-^*$. Ce qu'on obtient automatiquement tout de même est la continuité sur $\mathbb{R}_-^*$ à gauche. Il faut tout de même vérifier la continuité à droite.

Proposition 1 | Restriction d'une fonction continue

La restriction d'une fonction continue à un intervalle (non réduit à un point) est continue.

Définition 2 | Fonction continue par morceaux

On dit qu'une fonction définie sur un intervalle d'extrémités a et b (éventuellement infinis) est continue par morceaux s'il existe une subdivision $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ telle que toutes les fonctions restreintes (pour $i \in [\![1, n-1]\!]$) $f_{]a_i, a_{i+1}[}$ admettent un prolongement continu à $[a_i, a_{i+1}]$.

Exemple 3 —

1. La fonction partie entière est continue par morceaux.
2. La fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et 0 sinon est continue par morceaux. Celle-ci est très importante en probabilités.

2. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES, CONSÉQUENCES

Théorème 3 | Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

Remarque 2.1 — Le TVI se reformule en disant que pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation

$$f(x) = k$$

admet au moins une solution sur $[a,b]$.

Preuve La preuve se base sur la résolution algorithmique de $f(x) = k$ par algorithme dit de **dichotomie**. C'est une compétence Python exigible au concours.

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto x + \ln(x)$.

1. En utilisant le TVI entre $\frac{1}{4}$ et 1. Montrer qu'il existe une solution à l'équation $f(x) = 0$.
2. En s'inspirant de la preuve du TVI. Écrire une fonction Python qui donne une approximation d'une solution de l'équation.

Théorème 4 | TVI - Version intervalle

Soit f une fonction continue sur intervalle I. On note

$$m = \inf_{x\in \mathrm{I}} f(x) \text{ si f est minorée ou } m = -\infty \text{ sinon}$$

et

$$\mathrm{M} = \sup_{x\in \mathrm{I}} f(x) \text{ si f est majorée ou } m = +\infty \text{ sinon.}$$

Alors tout $k \in]m, \mathrm{M}[$ admet au moins un antécédent par f dans I.

Théorème 5 | TVI - Version générale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Remarque 2.2 — Attention, si on n'est pas sur un segment on perd toute information supplémentaire sur la nature de l'intervalle (ouvert, borné, semi-fermé, etc). Par exemple :

1. cos est définie sur un intervalle ouvert non borné, alors que $\cos(\mathbb{R})$ est le segment $[-1,1]$,
2. tan restreinte à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est définie sur un intervalle ouvert non borné, alors que $\tan(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[=\mathbb{R}$ n'est ni borné ni ouvert,
3. la fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$ alors que son image $\mathbb{R}_+$ est semi-ouverte et bornée d'un seul coté.

Il n'y a que dans le cas d'un segment (intervalle fermé bornée) qu'on aura une conclusion.

Corollaire 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule jamais. Alors f est strictement positive ou strictement négative.

Exemple 4 — Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$ (c'est à dire que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

3. THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES

Théorème 6 | Théorème des bornes atteintes

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes : elle admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$.

Théorème 7 | Image d'un segment par une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un segment$[a,b]$, alors $f([a,b])$ est aussi un segment.

Notation

On note $\max_{[a,b]} f$ et $\min_{[a,b]} f$ le minimum et le maximum de f sur $[a,b]$. On note aussi

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Avec ces notations,

$$f([a,b]) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\right].$$

Exemple 5 — Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que

$$\forall x \in [a,b], f(x) < x.$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall s \in [a,b], f(x) \leqslant x - \alpha.$$

4. THÉORÈME DE LA BIJECTION CONTINUE

Commençons cette section par deux rappels

Proposition 2

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f. Alors pour toutes parties A et B de D_f on a :
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(A)$.

Remarque 4.1 — Dans un tableau de variation, les flèches obliquent signifient que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle dans lequel elles sont tracées.

Ces deux considérations, et le TVI, nous permettent de déterminer l'image d'une fonction à l'aide de son tableau de variation. Nous reviendrons sur cette méthode après avoir énoncé le théorème de la bijection.

Théorème 8 | Théorème de la bijection

Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(\mathrm{I})$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation.

Remarque 4.2 — Il faut bien noter qu'il y a trois conclusions dans ce théorème :

- f est continue
- la bijection réciproque f^{-1} est continue
- la bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone **du même sens de variation** que f.

Exemple 6 — *Construction de la fonction arctangente* La fonction tan est strictement croissante et continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'après le théorème de la bijection, elle est bijective et sa réciproque est une fonction continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Lorsque f est strictement monotone sur un intervalle I, on peut déterminer très facilement $f(\mathrm{I})$: il faut regarder les bornes de I, réfléchir si la fonction va "échanger leurs places", se demander si l'intervalle sera ouvert ou pas et s'il s'agira de limites (comme f est monotone, il y aura toujours des limites aux bornes !). Par exemple :

- si f est strictement croissante sur $]a, b]$ où a, b sont des réels, alors on aura
$$f(]a,b]) =]\lim_{x\to a}, f(b)]$$
,
- si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, l'image de f sera
$$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$
(on note qu'on a échangé les bornes car f est décroissante),
- si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, son image sera
$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$
.

Il y a bien sûr de nombreux autres exemples. Le plus important est de prendre son temps et de réfléchir.

Méthode *(Déterminer l'image d'une fonction à l'aide de son tableau de variations)*

Soit f une fonction continue sur D_f dont on connait le tableau de variations. Pour déterminer $f(\mathrm{D}_f)$ l'image de f on suit les étapes suivantes.

1. On décompose D_f en une union d'intervalles disjoints sur lesquels la fonction est monotone :
$$\mathrm{D}_f = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{I}_n,$$
2. On détermine $f(\mathrm{I}_k)$ à l'aide du TVI et du théorème de la bijection,
3. On conclut en calculant $f(\mathrm{D}_f)$ à l'aide de la relation
$$f(\mathrm{D}_f) = f(\mathrm{I}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{I}_n) = f(\mathrm{I}_1) \cup \cdots \cup f(\mathrm{I}_n).$$

Remarque 4.3 — Si D_f est un intervalle et si f est une fonction continue, $f(D_f)$ **doit être un intervalle**. Sinon il n'y a pas de raison particulière que ce soit le cas, bien que cela arrive.

Exemple 7 — Déterminons l'image de la fonction dont le tableau de variation est

x	$-\infty$		-5		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0 ‖	$\rightarrow$	0		‖	$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$		‖				‖ -10		

Ici $D_f =]-\infty, -5[\cup]-5,-3]\cup]2,+\infty[$. Donc

$$f(D_f) = f(]-\infty,-5[) \cup f(]-5,-3]) \cup f(]2,+\infty[).$$

Par continuité de f et par le tableau de variation

$$f(]-\infty,-5[) =]-\infty, 0[,$$

$$f(]-5,3[) = \{0\},$$

$$f(]2,+\infty[) =]-10,+\infty[.$$

Donc

$$f(D_f) =]-\infty,0[\cup\{0\}\cup]-10,+\infty[= \mathbb{R}.$$

Le corollaire suivant donne une application fondamentale du théorème de la bijection à la résolution d'équations.

Corollaire 2

Soit f une fonction strictement monotone sur $[a,b]$ et soit k strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. L'équation $f(x) = k$ admet exactement une solution.

Exemple 8 — En fonction de $b \in \mathbb{R}$, quel est le nombre de solutions de l'équation

$$x^3 - 3x^2 + 3x = b.$$

Proposition 3

Dans un repère, les courbes représentatives d'une bijection et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

5. RETOUR SUR LES SUITES RÉCURRENTES

Pour rappel, il y a certaines familles de suites définies par récurrence que l'on sait étudier en donnant une formule explicite :

1. les suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + r$,
2. les suites géométriques : $u_{n+1} = qu_n$,
3. les suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = au_n + b (a \neq 1)$,
4. les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Dans les exercices, on aura souvent des études de suites définies par des récurrences de la forme

$$u_0 = a \in \mathbb{R}, \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction de domaine D_f.

La suite est-elle bien définie ? Si D_f n'est pas dans $\mathbb{R}$, pour montrer que la suite est bien définie il faut montrer par récurrence la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{D}_f.$$

Par exemple si (u_n) est définie par

$$u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n},$$

on montre par récurrence que pour tout n, $u_n \geqslant -1$. Cela peut se faire soit par des manipulations algébriques élémentaires, sont en dressant le tableau de variation de f.

Attention

Dresser le tableau de variations de f, au moins au brouillon, sera toujours utile. Sur la copie, il pourra même servir de justifications à vos affirmations ultérieures. Il sera souvent demandé dans le sujet.

Quelles sont les limites possibles ? Une fois cette étape passée, pour déterminer le comportement d'une telle suite, on sera souvent amené à utiliser ce résultat.

Proposition 4

Si (u_n) converge vers ℓ et si f est et continue en ℓ, alors

$$\ell = f(\ell).$$

Cela permet de trouver, si elle existe, la valeur de la limite. Cela a deux utilités :

- si on a déjà prouvé que u_n converge par d'autres théorèmes, et qu'il existe une unique solution de

  $$f(\ell) = \ell$$

  pouvant être la limite, alors on peut conclure que u_n converge vers cette valeur.
- Si ce n'est pas possible que (u_n) converge vers une telle limite (par exemple si on ne trouve que des solutions négatifs alors que la suite est positive), ou si l'équation n'a pas de solution, on peut déduire que la suite diverge. Attention, dans ce cas ce n'est peut être pas fini, il peut y avoir une limite infinie, des sous-suites à étudier... cela dépend de l'exercice.

Dans les exercices, on vous demandera souvent de montrer que la suite converge.

Étude du caractère borné de la suite - recherche d'intervalle stable Cela sera souvent guidé en plusieurs questions, d'abord on demandera de montrer qu'elle est bornée / majorée / minorée par exemple en demandant de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$$

où a et b sont fixés.

Comment faire ça ? Dans tous les cas, on le fait par récurrence, après il y a deux façon :

1. soit on arrive à le faire par manipulations algébriques simples,
2. soit on utilise le tableau de variations de la fonction, en s'en servant pour montrer que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Vocabulaire

Si on trouve un intervalle I (pas forcément borné) tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, on dit que I est un intervalle stable par f. Même s'il n'est pas borné, c'est très intéressant car il suffit que $u_0 \in \mathrm{I}$ pour avoir (par récurrence)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{I}.$$

De même, s'il existe un rang n_0 où la suite rentre dans l'intervalle, elle y restera.

Étude de la monotonie. Si vous arrivez à montrer que la suite est minorée/majorée /bornée et qu'on vous demande de montrer qu'elle est convergente, c'est souvent une étude de monotonie qui sera utile.

Attention

Avant toute chose et pour éviter d'écrire des grosses bêtises, si vous en avez la possibilité : calculez les premiers termes de la suite. Cela vous donnera une intuition de la monotonie de la suite, et peut être mène d'un majorant, d'un minorant, et de la limite.

Pour montrer que la suite est monotone, il y aura des méthodes classiques à essayer :

1. parfois, le calcul de $u_{n+1} - u_n$ permettra, combiné avec ce qui aura été fait précédemment (déterminer un intervalle I avec $u_n \in \mathrm{I}$ pour tout n), de conclure directement
2. parfois, l'étude **du signe** de $g : x \mapsto f(x) - x$ sur I où I est un intervalle stable par f suffira aussi : si g est positive alors (u_n) est croissante; si g est négative alors (u_n) est décroissante
3. l'étude de f sur un intervalle stable I peut aussi être suffisante car **si f est croissante**, alors la suite sera monotone :
   - si $u_0 \geqslant u_1$, on montre par récurrence qu'elle est décroissante,
   - si $u_0 \leqslant u_1$, on montre par récurrence qu'elle est décroissante.

   Attention, si f est décroissante, alors la suite **ne sera pas monotone** : mais si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante, et alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (de monotonie inverse. Pour connaitre le sens de la monotonie on regarde les premiers termes. On mène alors l'étude des deux suites extraites en espérant calculer leurs limites pour conclure !

Attention

Les résultats énoncés dans cette partie ne sont pas des théorème du cours que l'on peut utiliser et citer directement : ce sont des méthodes qui sont utiles pour mener à bien de nombreux exercices de concours. Ces exercices seront décomposés en sous question et chacune devra être menée avec soin. Dans ce cours on a vu la grande majorité des cas qui se présenteront à vous.