Thomas Cometx

TD 10 - Calcul matriciel

1. CALCUL MATRICIEL

Exercice 1 Calculer les produits matriciels suivants $A \times B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

1. A quels ensembles appartiennent respectivement ${}^t XX$ et $X\,{}^t X$?
2. Les calculer.

Exercice 3 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 12 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices AB et BA.
2. Calculer $(AB)^2$.

Exercice 4 Soient A et B deux matrices dans $M_n(\mathbf{R})$ qui commutent. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

Application : si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calculer pour tout entier k, A^k en décomposant A comme la somme de deux matrices qui commutent.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit les matrices élémentaires de $M_n(\mathbf{R})$ (notées $E_{i,j}$) qui ont des zéros sur tous leurs coefficients sauf le coefficient de coordonnées (i, j) qui vaut 1.

Pour tout (i, j) et (k, ℓ), calculer le produit $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$.

Exercice 6 Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ la matrice contenant uniquement des 1.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbf{N}, A^k$.
2. En déduire une formule pour $(\lambda I_n + J)^k$ à l'aide du binôme de Newton.

Exercice 7 Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D.
3. En déduire que pour tout entier n, $D^n = P^{-1}M^nP$.
4. En déduire une formule pour M^n.

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 + x$. Calculer P(A).
2. Soit $n \in \mathrm{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
3. En déduire une formule pour A^n.

Exercice 9 Montrer, par analyse synthèse, que toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 10 On cherche a à calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les premiers termes. Conjecturer une formule à démontrer par récurrence.

Exercice 11 **Commutant d'une matrice diagonalisable. Exercice très classique !**

1. Soit $D \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale **à coefficients distincts**. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec D.
2. Montrer que l'ensemble trouvé est égal à

$$\{Q(D), Q \in \mathbf{R}[x]\}.$$

3. On dit que A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = B$. Soit $C \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que C commute avec A si et seulement si $P^{-1}CP$ commute avec B.
4. On dit qu'une matrice M est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}MP = D$.
5. Soit M une matrice diagonalisable. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$.
6. Déterminer les matrices qui commutent avec M.
7. Montrer que l'ensemble trouvé est égal à

$$\{Q(M), Q \in \mathbf{R}[x]\}.$$

2. MATRICES INVERSIBLES

Exercice 12 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 Montrer qu'une matrice $(2,2)$ est inversible si et seulement si ses colonnes sont non proportionnelles.

Exercice 14 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} x & -3 & 2 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbf{R}.$$

Exercice 15 A l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que tout matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |\mathrm{A}_{i,i}| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|$$

est inversible. (On dit qu'une telle matrice est à diagonale dominante).

Exercice 16 On dit qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ est nilpotente si et seulement si il existe un entier k tel que $\mathrm{A}^k = 0_n$. Soit A une telle matrice

1. Expliquer pourquoi il existe un plus un plus petit entier m tel que $\mathrm{A}^m = 0_n$.
2. Montrer que $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est inversible. On pourra considérer la matrice

$$\mathrm{B} = \sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{A}^j.$$