TD 14 - Variables aléatoires finies

1. GÉNÉRALITÉS

Exercice 1 On lance une pièce équilibrée 15 fois. Donner

1. la probabilité de ne faire que des piles,
2. la probabilité de ne faire aucun pile,
3. la probabilité de faire trois piles,
4. la probabilité de faire strictement plus de faces que de piles.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k).$$

Application : soit X et Y deux variables aléatoires de loi uniformes sur $[\![1, n]\!]$. Calculer l'espérance de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 3 Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soit X la variable aléatoire finie, à valeurs dans $[\![1, ab]\!]$, vérifiant

$$\forall k \in [\![1, ab]\!] P(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

1. Donner une condition nécessaire sur a et b pour que X soit une variable aléatoire finie.
2. Reconnaître une loi usuelle.
3. En déduire E(X) et V(X).
4. Trouver a et b tels que $E(X) = \frac{13}{2}$.

Exercice 4 Soit k un entier naturel et X une variable aléatoire répartie uniformément sur les nombres pairs de 0 à $2k$.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire E(X) et V(X).
3. On pose $Y = X/2 + 1$. Montrer que Y suit une loi usuelle et retrouver ainsi E(X) etV(X).

Exercice 5 On tire successivement $n \in \mathbb{N}^*$ boules dans une urne contenant b boules blanches et r boules rouges. On pose X le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de X lorsque le tirage a lieu avec remise.
2. Déterminer la loi de X lorsque le tirage a lieu sans remise et que $n \leqslant b + r$.

Exercice 6

Une urne contient deux jetons marqués pour l'un 2 et pour l'autre -3. On tire trois fois de suite un jeton de l'urne en le remettant après chaque tirage. On note a, b, c les nombres obtenus respectivement à chaque tirage. A chaque triplet obtenu, on fait correspondre l'ensemble des nombres complexes solution de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Donner la loi du nombre de solutions réelles de cette équation.

2. LOIS USUELLES

Exercice 7 Une urne contient dix boules rouges et cinq boules bleues. On pioche simultanément six boules et on note R et B le nombre de boules rouges et bleues respectivement obtenues. Déterminer Ω et son cardinal, puis la loi et l'espérance R et B.

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi $\mathscr{B}(n, p)$. Quelle loi suit la variable aléatoire $Y = n - X$.

Exercice 9 Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{-1, 1\}$ et $S = X_1 + \dots + X_n$.

1. Rappeler le nom de la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de $Y_i = (X_i + 1)/2$.
3. En déduire la loi de S.

Exercice 10 **[Loi hypergéométrique]** Soient n, r et N dans $\mathbb{N}^*$ avec $r < N$ et $n \leqslant N$. Une urne contient N boules dont r rouges et $b = N - r$ bleues. On pose $p = \frac{r}{N}$.

1. On tire successivement, avec remise, n boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues. Montrer que R suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On tire successivement et sans remise n boules dans l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.
   a) Décrire l'expérience à l'aide d'un espace probabilisé Ω.
   b) Déterminer $X(\Omega)$?

c) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{1-pN}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On dit que X suit la loi **hypergéométrique** de paramètres N, n et p.

d) Montrer que $E(X) = np$.

3. PROBLÈMES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 11 Un étudiant passe un QCM à n questions. Pour chaque question, il a une probabilité p de connaître la réponse de façon indépendante. S'il ne sait pas il répond au hasard parmi les 4 questions. On note X la v.a. du nombre de questions qu'il sait résoudre et Y le nombre de questions où il a juste en répondant au hasard.

1. Que représente $Z = X + Y$.
2. Expliquer pourquoi Z doit suivre une loi Binomiale.
3. Déterminer les paramètres de la loi.
4. Calculer E(Z).

Exercice 12 Deux archers se présentent devant n cibles. Ils tentent chacun leur chance sur chaque cible et chacun des tirs est indépendant. Le premier archer a une probabilité $p \in [0,1]$ de réussir chaque tir et le deuxième archer a une probabilité $q \in [0,1]$. Les archers jouent en équipe et marquent un point par cible qui a été touchée par au moins un des deux tireurs. Il n'y a aucun bonus si les deux touchent une même cible.

1. Soit X_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si la cible 1 rapporte un point et 0 sinon. Quelle est sa loi ?
2. Soit Z la variable aléatoire qui compte les points de l'équipe. Donner la loi de Z ainsi que son espérance.

Exercice 13 M. Atchoum dispose d'un paquet de N mouchoirs en papier dans chacune des poches droite et gauche de son pantalon. Chaque fois qu'il éternue, il choisit une poche au hasard pour prendre un mouchoir. Il répète cela jusqu'à ce qu'il vide l'un des paquets. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de mouchoirs restant alors dans l'autre paquet.

1. Exprimer la loi de X.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(2N-k-1)P(X=k+1) = 2(N-k)P(X=k).$$

3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 14 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![, n]\!]$ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{E}[\mathrm{X}^n] = \mathrm{E}[\mathrm{Y}^n].$$

Montrer que X et Y suivent la même loi.

PROBLÈME : URNES DE POLYA

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. Si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire.
2. Si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\mathrm{S}_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*, \mathrm{S}_n = b + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (noté $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Partie I-Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II-La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1|S_n = k)$.
5. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b+r+n}$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Partie III-La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

7. Exprimer l'évènement $(S_n = 1)$ avec les évènements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k|S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k-1, k\}, \quad (ii)\ \ell = k-1, \quad (iii)\ \ell = k.$$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P(S_n = k)$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.