TD 15 - Intégrales et primitives

1. PREMIERS CALCULS

Exercice 1 Calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Exercice 2 Soit f une fonction continue impaire sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0.$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$
2. $\mathrm{I}_2 = \int_0^1 \frac{3\,\mathrm{d}t}{(t+2)^2}$
3. $\mathrm{I}_3 = \int_0^1 \frac{3\,\mathrm{d}t}{(t+2)^3}$
4. $\mathrm{I}_4 = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin(4t)\,\mathrm{d}t$
5. $\mathrm{I}_5 = \int_0^8 (\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t$
6. $\mathrm{I}_6 = \int_{-1}^0 e^{2t+1}\,\mathrm{d}t$
7. $\mathrm{I}_7 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-4t^2}}$
8. $\mathrm{I}_8 = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+9t^2}$

Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quels intervalles elles admettent une primitive et en donner une.

1. $f_1(t) = \frac{1}{t+1}$
2. $f_2(t) == \frac{3}{(t+2)^2}$
3. $f_3(t) \frac{3}{(t+2)^3}$
4. $f_4(t) = \sin(4t)$
5. $f_5(t)(\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t})$
6. $f_6(t) = e^{2t+1}\,\mathrm{d}t$
7. $f_7(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$
8. $f_8(t) = \frac{1}{1+9t^2}$

Exercice 5 On définit une suite réelle $(u_n)_n$ par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$

1. Montrer que la suite u_n est décroissante et minorée.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que u_n converge vers 0.

Exercice 6 On pose $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ et $\mathrm{I}_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

1. Calculer I_1 à l'aide d'une primitive.
2. Calculer $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$.
3. En déduire la valeur de I_2.

2. INTÉGRATIONS PAR PARTIES

Exercice 7 Calculer les primitives en utilisant une ou des intégrations par parties.

1. $I_1(x) = \int_1^x t\ln^2 t\,\mathrm{d}t \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$
2. $I_2(x) = \int_0^x t^3 e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad (x \in \mathbb{R})$
3. $I_3(x) = \int_0^x t^2 \sin t\,\mathrm{d}t \quad (x \in \mathbb{R})$

Exercice 8 On définit

$$A = \int_0^x \cos(t)e^t dt \text{ et } B = \int_0^x \sin(t)e^t dt.$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A en fonction de B.
2. A l'aide d'une seconde intégration par parties, déterminer les primitives de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$.

Exercice 9 On souhaite calculer l'intégrale $J = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$.

1. A l'aide l'une intégration par parties, exprimer J en fonction de $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$.
2. Calculer J à l'aide d'une seconde intégration par parties.
3. En déduire I.

3. CHANGEMENT DE VARIABLES

Exercice 10 Trouver des primitives des fonctions suivantes par changement de variable. Préciser l'intervalle.

1. $f_1(x) = \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}$ (avec $x = \frac{1}{t}$),
2. $f_2(x) = e^{\sqrt{x}}$ (avec $u = e^{\sqrt{x}}$),
3. $f_3(x) = \frac{x}{(1+x^2)(2+x^2)}$ (avec $s = x^2$),
4. $f_4(x) = \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}$)(avec $y = \cos(t)$).

Exercice 11 Calculer les intégrales suivantes par changement de variable.

1. $\int_0^\pi \cos(4t+\pi)\mathrm{d}t$
2. $\int_1^2 e^{-x+2}\mathrm{d}x$
3. $\int_{-2}^2 \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$
4. $\int_0^x e^{at} t\mathrm{d}t.$

4. SOMMES DE RIEMANN

Exercice 12 Montrer que les suites suivantes sont convergentes et déterminer leur limite.

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$,
2. $v_n = n^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$,
3. $w_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$.

5. POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 13 **[Lemme de Riemann-Lebesgue]**

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin(nt) f(t) \mathrm{d}t = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \cos(nt) f(t) \mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 14 **[Intégrales de Wallis]**

Pour tout entier n on définit l'intégrale de Wallis

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx.$$

1. Calculer I_1 et I_2.
2. Soit $n \geqslant 2$. On écrit $\sin(x)^n = u(x)v'(x)$ avec $u(x) = \sin(x)^{n-1}$ et $v'(x) = \sin(x)$. A l'aide d'une intégration par parties et de la relation $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, montrer que $\mathrm{I}_n = (n-1)(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n)$.
3. Exprimer I_n en fonction de I_{n-2}.
4. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 15 Soit $\mathrm{A} > 0$ et f une fonction continue impaire définie sur $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$. Montrer que

$$\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 16 Pour tout $p, q \in \mathbf{N}^2$ on définit

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q \mathrm{d}x.$$

1. Pour $p, q > 0$, trouver une formule reliant I, p et $\mathrm{I}_{p+1,q-1}$.
2. Que vaut $\mathrm{I}_{p+q,0}$?
3. En déduire une expression pour $\mathrm{I}_{p,q}$.

Exercice 17 On définit, pour tout entiers positifs p et q la fonction

$$f_{p,q} : x \in]0,1] \mapsto t^p \ln(t)^q.$$

1. Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction continue sur $[0,1]$. On note toujours $f_{p,q}$ la fonction prolongée.
2. On note $\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 f_{p,q}(t) dt$. Exprimer $\mathrm{I}_{p,q+1}$ en fonction de $\mathrm{I}_{p,q}$.
3. En déduire une formule reliant $\mathrm{I}_{p,q} = \mathrm{I}_{p+q,0}$.
4. En déduire la valeur de $\mathrm{I}_{p,q}$.