TD 15bis - Intégrales et primitives

Exercice 1 Calculer, à l'aide d'intégrations par parties, les intégrales suivantes.

1. $\int_1^4 \frac{\ln(x)}{x^3} dx$.
2. $\int_1^3 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$.
3. $\int_0^x te^{-t} dt$.
4. $\int_1^x \ln(t) dt$.
5. $\int_1^x \ln(t)^2 dt$.
6. $\int_0^2 (x^2+x)\cos(x) dx$.

Exercice 2 Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_1^e t^n \ln(t) dt.$$

Exercice 3 On défit une suite d'intégrales par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{K}_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin(x) dx.$$

Calculer $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1$ puis exprimer K_{n+2} en fonction de K_n. On utilisera des intégrations par parties.

Exercice 4 On définit une suite d'intégrales par

$$\forall n \in \mathrm{N}, \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout n,
$$\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$
3. En déduire que I_n tend vers 0.
4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes en réalisant le changement de variable indiqué.

1. $$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx \text{ en posant } u = e^{\sqrt{x}}.$$

2.

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx \text{ en posant } u = e^x.$$

3.

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx \text{ en posant } t = x^3.$$

4.

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{1+x\cos(t)^2}dt \text{ en posant } u = \cos(t).$$

Exercice 6 Calculer l'intégrale suivante en réalisant le changement de variable $x = \cos(u)$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Exercice 7 A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_0^x \arctan(t)dt.$$

Exercice 8 Pour tout $p, q \in \mathbf{N}^2$ on définit

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q \mathrm{d}x.$$

1. Pour $p, q > 0$, trouver une formule reliant $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p+1,q-1}$.
2. Que vaut $\mathrm{I}_{p+q,0}$?
3. En déduire une expression pour $\mathrm{I}_{p,q}$.

Exercice 9

1. Calculer

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}dt.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}dt.$$

4. Justifier que

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}dt.$$

5. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$