TD 16 - Polynômes

1. GÉNÉRALITÉS

Exercice 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(x^3 + x^2 + x + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^k = x^{2n+3} + x^{2n+1} + x^2 + 1$$

Exercice 2 Quels sont les degrés, coefficients dominants et coefficients de plus bas degré de chacun des polynômes suivants.

1. $\mathrm{P}(x) = x^4 - x^2(x-1)(x-2)$,
2. $\mathrm{P}(x) = (x-2)^n$,
3. $\mathrm{P}(x) = (x-1)^7 - (x+1)^7$,
4. $\mathrm{P}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x-j)$.

Exercice 3 Soit $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Déterminer les dérivées successives du polynôme $\mathrm{P}(x) = (x-a)^n$.

Exercice 4 Déterminer tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[x]$ tels que $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} = \mathrm{P}$.

Exercice 5 Déterminer les couples de polynômes $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbf{R}[x]^2$ tels que $\mathrm{Q}^2(x) = x\mathrm{P}^2(x)$.

2. DIVISION DE POLYNÔMES

Exercice 6 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $3x^5 + 2x^4 - x^2 + 1$ par $x^3 + x + 2$,
2. $x^5 - 7x^4 - x^2 - 9x + 9$ par $x^2 - 5x + 4$.

Exercice 7 Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[x]$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par

1. $(x-a)$,
2. $(x-a)^2$,
3. $(x-a)(x-b)$.

Exercice 8 Montrer que pour tout $\mathrm{P}(x) \in \mathbf{R}[x]$, $\mathrm{P}(x) - x$ divise $\mathrm{P}(\mathrm{P}(x)) - x$.

3. RACINES

Exercice 9 Trouver les racines du polynôme $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ sachant qu'il a une racine double.

Exercice 10 On considère le polynôme $P(x) = x^5 - 11x^3 + 11x^2 + 8x - 4$ Trouver l'ordre de la racine 2.

Exercice 11 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le polynôme $(x-1)^3$ divise $P(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$.

Exercice 12 Déterminer tous les polynômes vérifiant $P(x-1) = P(x)$.

4. FACTORISATION

Exercice 13 Factoriser dans $\mathbf{R}[x]$ les polynômes

1. $P(x) = x^4 + 1$,
2. $P(x) = x^3 - 2$.

Exercice 14 Sachant qu'il admet des racines multiples, factoriser dans $\mathbf{R}[x]$ le polynôme

$$P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - 1.$$

5. APPLICATIONS

Exercice 15

1. Réaliser la division euclidienne de $x^3 + 1$ par $x + 2$.
2. En déduire une primitive de

$$f : x \mapsto \frac{x^3+1}{x+2} \text{ sur }]-2, +\infty[.$$

Exercice 16 On définit une matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Soit P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = x^2 - x - 6.$$

Montrer que $P(A) = 0_2$.

2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Expliquer pourquoi il existe des réels a_n et b_n et un polynôme $Q \in \mathbf{R}[x]$ tel que
$$\forall x \in \mathbf{R}, x^n = Q(x)P(x) + a_n x + b_n.$$
3. En évaluant cette égalité pour des valeurs de x bien choisies, déterminer a_n et b_n.
4. Justifier que $A^n = a_n A + b_n I_2$.
5. Calculer A^n.

6. UN PROBLÈME CLASSIQUE : INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soient $n \in \mathrm{N}^*$, f une fonction réelle définie sur un intervalle I et $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts de I. On souhaite montrer le résultat suivant

Théorème 1

Sous les hypothèses précédentes, il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[x]$ tel que
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, P(a_i) = f(a_i).$$
De façon équivalente, si on se donne des réels $b_1, \ldots, b_n$, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[x]$ tel que
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, P(a_i) = b_i.$$
Un tel polynôme s'appelle **polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points a_i.**

1. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on définit une fonction sur I par
$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$
Montrer que L_i est une fonction polynomiale et donner son degré.

2. Pour tout $k \in \{1, \ldots n\}$, calculer $\mathrm{P}(a_k)$.
3. Vérifier que le polynôme

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \mathrm{L}_i(x) \text{ convient.}$$

4. Soit Q un autre polynôme qui convient, en déterminant des racines de $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$, montrer que nécessairement $\mathrm{Q} = \mathrm{P}$. Que peut-on conclure ?
5. Montrer que si on n'impose plus de condition de degré, le polynôme n'est plus unique.
6. **Exemple pratique :** Déterminer le polynôme interpolateur de la Lagrange de la fonction $x \mapsto r^x$ (où $r \in \mathbf{R}_+$ est fixé) aux points $\{1, \ldots, n\}$. Calculer alors $\mathrm{P}(n+1)$