TD - Introduction aux espaces vectoriels

1. EXEMPLES D'ESPACES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 1 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? (de $\mathbf{R}^n$ ou de $M_{n,1}(\mathbf{R})$.

1. $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), x+2y=z\right\}$
2. $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbf{R}), y=x+1\right\}$
3. $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbf{R}), y=x\right\}$
4. $\left\{\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}\right\}$
5. $\left\{\begin{pmatrix} x \\ 2x+y \\ y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbf{R}^2\right\}$
6. $\left\{(x,x,y,y), (x,y) \in \mathbf{R}^2\right\}$
7. $\left\{(x,y,z,x+y+z), (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\right\}$
8. $\left\{(x,y,z,x+y+z+1), (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\right\}$
9. $\left\{(x,x^2,x^3,x^4), x \in \mathbf{R}\right\}$
10. $\left\{(x,y,z,0), (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\right\}$
11. $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, 5x+3y=0\right\}$
12. $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, 5x+3y=0 \text{ et } z=y+1\right\}$
13. $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, 5x+3y=0 \text{ et } z=y\right\}$

Exercice 2 Les espaces suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}_{[}X]$?

1. Les polynômes de degré inférieur ou égal à n ?
2. Les polynômes de degrés supérieure ou égal à n ?
3. Les polynômes dont 0 n'est pas une racine ?
4. Les polynôme qui ont zéro pour racine ?
5. Les polynômes qui ont zéro pour racine simple ?
6. Les polynômes qui ont zéro pour racine exactement double ?
7. Les polynômes qui ont zéro pour racine au moins double ?
8. Les polynômes tels que $P(-1)=P(1)$?
9. Les polynômes tels que $P(-1)=P(1)^2$?
10. Les polynômes tels que $P(-1)=P(1)+P(2)$?
11. Les polynômes vérifiant $P(X)=P(-X)$?

Exercice 3 Les espaces suivants sont-ils des sous espaces vectoriels des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

1. Les suites qui tendent vers 0,
2. Les suites qui tendent vers 1,
3. Les suites qui vérifient la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$,
4. Les suites qui vérifient la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$,
5. Les suites arithmétiques,
6. Les suites géométriques,
7. Les suites croissantes.

Exercice 4 Les espaces suivants sont-ils des sous espaces vectoriels des fonctions de $\mathbf{R}$ dans lui même ?

1. Les fonctions paires,
2. Les polynômes,
3. Les fonctions vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}, f(n) = f(0)$,
4. Les fonctions périodiques,
5. Les fonctions croissantes.

Exercice 5 **[Quelques exemples dans les matrices]** Soit $n \in \mathrm{N}^*$.

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, le **commutant de la matrice** M est l'ensemble des matrices
$$\mathrm{C_M} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}), \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}.$$
Montrer que $\mathrm{C_M}$ est un espace vectoriel. Trouver une matrice M telle que $\mathrm{C_M} = \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.
2. $\mathrm{N}_n = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}), \mathrm{M}^n = 0_n\}$ est l'ensemble des **matrices nilpotentes**. Montrer que N_n n'est pas un espace vectoriel. On commencera par chercher des contres exemples pour $n = 2$.
3. L'application Trace sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ est définie par $\mathrm{T}r(\mathrm{M}) = \sum_{k=1}^n \mathrm{M}_{i,i}$. Montrer que $\mathrm{K}er(\mathrm{T}r) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}), \mathrm{T}r(\mathrm{M}) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. ($\mathrm{K}er(\mathrm{T}r)$ *est appelé le* ***noyau*** *de l'application Trace*).

Exercice 6 **[Des espaces vectoriels engendrés]** Dans $\mathbf{R}^3$, montrer l'égalité

$$\mathrm{V}ect((1,2,0),(0,2,1)) = \mathrm{V}ect((-1,-4,-1),(2,2,-1)).$$

2. FAMILLES LIBRES, FAMILLES GÉNÉRATRICES, BASES

Exercice 7 Les familles suivantes sont elles libres dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$?

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}\right)$
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
3. $\left(\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

Exercice 8 Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Justifier.

1. $(\cos, \sin, x \mapsto 2, e^x)$ dans les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$,
2. les suites géométriques (1^n), (2^n) et (3^n) dans les suites réelles ?
3. $((X-1), (X-2), (X-1)(X-2))$ dans les polynômes,
4. les matrices $\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\5 & 0\end{pmatrix}\right)$ dans $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

Exercice 9 Soient $a_1, \dots, n$ des réels tous différents. Montrer que la famille de fonctions

$$(x \mapsto e^{a_i x}, i \in [\![1, n]\!])$$

est libre dans $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Exercice 10 Soient $P_0, \dots, P_n$ des polynômes tels que $\deg P_i = i$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre dans $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 11 **[Familles génératrices]** Trouver des familles génératrices des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), x + 2y = z\right\}$
2. $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), x + 2y = 0\right\}$

3. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbf{R}), \begin{cases} x - y = z \\ y = 2z + x \end{cases} \right\}$

4. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbf{R}), \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$.

5. $\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,2}(\mathbf{R}), \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = t \end{cases} \right\}$.

Exercice 12 Trouver des familles génératrices des sous-espaces vectoriels suivants.

1. $\{\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2[\mathrm{X}], \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)\}$,
2. $\{\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2[\mathrm{X}], \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$,
3. $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, x = y \text{ et } z = t\}$,
4. les suites (u_n) vérifiant $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$,
5. $Vect((1,1,0), (0,1,1), (1,0,1))$.

Exercice 13 Les familles suivantes sont elles des bases de $\mathrm{M}_{2,1}$?

1. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$,
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,
3. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
4. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix},\right)$.

Exercice 14 Les familles suivantes sont elles des bases de $\mathrm{M}_{3,1}$?

1. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$,
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$,
3. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$,
4. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 15 Déterminer des bases des sous espaces vectoriels suivants :

1. $Vect((1,1,1), (1,-1,0), (0,4,2))$ dans $\mathbf{R}^3$.
2. $Vect((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0))$ dans $\mathbf{R}^3$.
3. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}$ dans R^3.
4. $\{\mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}], \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$ dans $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$ $(n \geqslant 2)$
5. $\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

Exercice 16 **[Avec les matrices]**

1. Déterminer une base de $\{M \in M_n(\mathbf{R}), Tr(M) = 0\}$,
2. Déterminer une base de l'ensemble des matrices symétriques,
3. Déterminer une base de l'ensemble des matrices antisymétriques.