TD 18 - Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice est inversible. Après avoir prouvé que c'est un espace vectoriel, déterminer la dimension de $\{X \in M_{2,1}(\mathbf{R}), MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit $n \geq 1$. Déterminer une base et la dimension de $\{P \in \mathbf{R}_n[x], P'(0) = P(0)\}$.

Exercice 3 Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. Pour tout i , on définit un polynôme

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Calculer pour tout (i, j) , $L_i(a_j)$. Montrer que $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

2. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[x]$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k(x).$$