TD 20 - Séries numériques

Exercice 1 On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$.
2. En déduire une expression de la somme partielle de la série.
3. La série converge-t-elle ?

Exercice 2 Soit $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \int_0^1 (-x)^{n-1}$.
2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{1+(-x)^n}{1+x} dx.$$

3. Montrer que la série converge vers $\ln(2)$. On utilisera que $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

Exercice 3 On considère la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right).$$

A l'aide du calcul des sommes partielles par télescopage, déterminer la nature et éventuellement la somme de la série.

Exercice 4 Montrer que la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{4}{3^n \ln(n)} \text{ converge.}$$

Exercice 5 Reconnaître les séries suivantes et calculer leurs sommes.

1. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n}{2^n}$
2. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{3^{n+1}}{n!}$
3. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(-3)^n n!}$
4. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n(n-1)(-1)^n}{2^{2n}}$.

Exercice 6 On souhaite prouver que la série harmonique diverge. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sa somme partielle.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

2. En déduire que $\lim H_n = +\infty$.

Exercice 7

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(\frac{1}{n}) \geqslant \frac{2}{\pi n}$.
2. En déduire que la

$$\sum \sin(\frac{1}{n}) \text{ diverge.}$$

Exercice 8

Dans chacun des cas, la série de terme général u_n est-elle convergente ?

1. $u_n = \frac{n^2-4^3}{-4n^4+12}$
2. $u_n = \frac{\ln(n)n}{4^n}$
3. $u_n = \frac{5}{2+n!}$
4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}$
5. $u_n = (1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))(e^{\frac{1}{n}}-1)$
6. $u_n = \cos(\frac{1}{n!})$
7. $u_n = \frac{\ln(5^n)}{n^2}$
8. $u_n = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2})$
9. $u_n = e^{-n} n^{1000}$.

Exercice 9

Les séries de terme général u_n sont-elles convergentes ? On raisonnera sur les paramètres $\alpha, \beta > 0$.

1. $u_n = \sin(\frac{1}{n^\alpha})(1-\cos(\frac{1}{n^{2\alpha}})$
2. $u_n = \sin(n^\alpha e^{-n})(1 - \cos(n^\beta e^{-n})$
3. $u_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n^\alpha}}} \arctan(\frac{1}{n^\alpha})$
4. $u_n = \frac{\sin(n^\alpha e^{-n})}{(1-\frac{1}{n^\beta})^5}$
5. $u_n = \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$
6. $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^\alpha$.

Exercice 10

On dit qu'une série de terme général est **alternée** si u_n change de signe à chaque fois. On suppose dans cet exercice que

- $|u_n|$ est décroissante
- $\lim u_n = 0$.

On note S_n la suite des sommes partielles.

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Que peut on conclure ?
3. Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \sin(n\pi + \frac{1}{n}).$$

Exercice 11

Soit u_n la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et calculer la somme.
3. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

Exercice 12 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

1. On suppose que $\ell > 1$. Montrer qu'à partir d'un certain rang,
$$u_{n+1} > \frac{\ell + 1}{2} u_n.$$
En déduire que la série diverge.
2. On suppose que $\ell < 1$. Montrer qu'à partir d'un certain rang,
$$u_{n+1} < \frac{\ell + 1}{2} u_n.$$
En déduire que la série converge.
3. Si $\ell = 1$, trouver un exemple dans lequel la série diverge et dans lequel la série converge.