

# TD 21 - Compléments sur la dérivation

## 1. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

**Exercice 1** Déterminer les dérivées successives des fonctions définies par

$$f(x) = \ln(1+x), \quad g(x) = e^{2x+1}, \quad h(x) = \sqrt{x}.$$

On donnera l'ensemble lequel les fonctions sont de classe  $C^\infty$ .

**Exercice 2** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire pour tout  $(a, \phi) \in \mathbf{R}^2$  les dérivées  $n$ -ièmes des fonctions  $f : x \mapsto \cos(ax + \phi)$ .

**Exercice 3** Déterminer les dérivées successives des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 \cos(x), \quad g(x) = (x+1)^2 \ln(x), \quad h(x) = (x-1)^2 x^n.$$

**Exercice 4** Soient  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  des réels distincts. Déterminer la dérivée  $n$ -ième de

$$f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$$

et en déduire une formule pour

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

**Exercice 5** Soit  $f$   $n$  fois dérivable sur  $[a, b]$  telle que

$$f(a) = 0 \text{ et } \forall k \in \{0, n-1\}, f^{(k)}(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ . On utilisera le théorème de Rolle successivement sur les dérivées de  $f$ , et on fera un dessin.

**Exercice 6** Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}$ .

- Justifier que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  il existe un polynôme  $P_n$  tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

- Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ .

## 2. FORMULES DE TAYLOR

**Exercice 7** Montrer que la série  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  converge et déterminer sa somme. On appliquera la formule de Taylor à la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  après avoir déterminé ses dérivées successives.

**Exercice 8** Montrer que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

**Exercice 9** Donner une approximation de  $e$  à  $10^{-2}$  près. On utilisera l'inégalité de Taylor pour la fonction  $\exp$ .

**Exercice 10** Soit  $f$  une fonction  $C^2$  sur  $\mathbf{R}$  et  $x \in \mathbf{R}$ . Calculer

la limite lorsque  $h$  tend vers 0 de

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

**Exercice 11** Montrer que, pour tout réel  $x$

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}.$$

En déduire la limite de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

**Exercice 12** Déterminer toutes les fonctions  $f$   $n$  fois dérivables telles que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$ .

**Exercice 13** A l'aide d'une formule de Taylor, déterminer la limite en 0 de

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}.$$