TD 26 - Intégrales généralisées

1. INTÉGRALES CONVERGENTES

Exercice 1 Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

1. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+x} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+1}} dx$
4. $\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(t) dt$
5. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
6. $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$
7. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u-1}} du$
8. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u-1}^3} du$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x)}{\sqrt{tan(x)}} dx$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}(1+u)} du.$
11. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sin(x)} dx.$

Exercice 2 Pour quelles valeurs des paramètres réels α, β les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^\alpha x^\beta} dx,$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} dx,$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha x^\beta} dx$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha x^\beta} dx$
5. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^\alpha(x)}{x^\beta} dx.$

2. CALCUL D'INTÉGRALES

Exercice 3 On définit l'intégrale $K_n (n \in \mathbf{N}*)$ par

$$K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

Après avoir démontré la convergence des intégrales, établir que pour tout $n \in \mathrm{N}^*, 2nK_{n+1} = (2n-1)K_n$. En déduire une formule pour K_n.

Exercice 4 Dans cet exercice, on souhaite calculer les intégrales

$$I(n,\alpha) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt.$$

1. Justifier la convergence de ces intégrales pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha > 0$.
2. Pour tout $\alpha > 0$, calculer $I(0,\alpha)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I(n+1,1) = (n+1)I(n,1)$.
4. En déduire une formule pour $I(n,1)$.
5. En réalisant un changement de variable, trouver une formule pour $I(n,\alpha)$.

Exercice 5 On définit la suite d'intégrale suivante pour n, p des entiers naturels.

$$\mathrm{I}_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln(x)^p \, dx.$$

1. Montrer que toutes ces intégrales sont convergentes.
2. Déterminer, en fonction de la parité de n et p, le signe de l'intégrale.
3. Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$,

$$\mathrm{I}_{n,p+1} = -\frac{p+1}{n+1}\mathrm{I}_{n,p}.$$

4. En déduire une formule générale pour $\mathrm{I}_{n,p}$.

3. EXERCICES AVANCÉS

Exercice 6 Dans cet exercice on étudie l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt.$$

1. Justifier que l'intégrale est convergente.
2. Pour ne peut-on pas la calculer en écrivant

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt?$$

3. Calculer l'intégrale. On commencera par réaliser une intégration par partie avec $u(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$.

Exercice 7 Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

est convergente. On réalisera le changement de variable $u = x^2$, puis on réalisera une intégration par parties.

Exercice 8 Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit les intégrales

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} \text{ et } \mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n dt}{(1+t^2)(1+t^n)}.$$

1. Justifier que les intégrales convergent.
2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, exprimer I_n en fonction de J_n.
3. Calculer $\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n$.
4. En déduire I_n et J_n.