TD 27 - Couples de variables aléatoires

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que

$$\forall (i,j) \in \mathbf{N}^2, \mathrm{P}((\mathrm{X},\mathrm{Y}) = (i,j)) = \frac{a}{2^{i+j} j!}$$

pour un certain réel $a \in \mathbf{R}$.

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois marginales du couple.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise deux boules. On note X_1 et X_2 respectivement les numéros sur les boules tirées en premier et en deuxième.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi du couple $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$.
3. Quelle est la loi de T_2 ?
4. T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 Soient X et Y deux v.a. telles que le couple (X, Y) suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]^2$.

1. Traduire l'énoncé avec des quantificateurs.
2. Déterminer les lois de X et Y.
3. Déterminer la loi de $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 On dispose de deux dès à n faces qu'on lance simultanément. On note X et Y les résultats respectifs des deux dès.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$,
2. Déterminer la loi de $\mathrm{T} = \max(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$,
3. Déterminer la loi de $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

Exercice 5 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la probabilité que la matrice

$$\mathrm{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}(\omega) & \mathrm{Y}(\omega) \\ \mathrm{Y}(\omega) & \mathrm{X}(\omega) \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Exercice 6 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$ pour des réels $p, q \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de XY.
2. Que vaut $E(XY)$?

Exercice 7 Soient p et q deux réels de $]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires, suivant respectivement une loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$ et géométrique $\mathcal{G}(q)$. Montrer que $Z = Y^X$ admet une espérance, et déterminer sa valeur.

Exercice 8 On réalise une succession infinie de pile ou face d'une pièce qui a une probabilité p de tomber sur pile. On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer la loi du couple (X,Y).
3. Déterminer la loi de Y.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de v.a. indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose pour tout $i \in \mathbf{N}, Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Déterminer $E(S_n)$.
2. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^n Y_i$.

Exercice 10 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note $Z = \min(X,Y)$.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbf{N}, P(X \geqslant n)$.
2. Calculer, pour $n \in \mathbf{N}, P(Z \geqslant n)$.
3. En déduire la valeur de $P(Z = n)$.
4. Montrer que Z suit une loi géométrique de paramètre à déterminer.
5. X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 11 Un géologue creuse et chercher des pierres précieuses.. Le nombre pierres qu'il trouve en une heure est une variable aléatoire N qui suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Chacune de ces pierres a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être précieuse et donc $1-p$ d'être banale. On note X le nombre de pierres précieuses obtenues et Y le nombre de pierres banales.

1. Déterminer, pour tout $(i,j) \in \mathbf{N}^2$, la probabilité conditionnelle $P_{[N=i]}(X = j)$.
2. Déterminer la loi du couple (N,X).
3. Déterminer la loi de X.
4. Déterminer la loi de Y.
5. Montrer que X et Y sont indépendantes.