TD 29 - Applications linéaires et matrices

1. RETOUR SUR LE CHAPITRE 27, APPLICATIONS DE LA DIMENSION FINIE

Exercice 1 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$;
2. $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$;
3. $\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)$;
4. $\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2 Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\varphi(\mathrm{P}) = \left(\mathrm{P}(a_0), \mathrm{P}'(a_0), \dots, \mathrm{P}(a_n), \mathrm{P}'(a_n)\right).$$

Montrer que φ est bijective.

2. MATRICES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 3 Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1), \quad f(1,1,0) = (1,0) \quad \text{et} \quad f(1,1,1) = (1,1).$$

Exprimer $f(x,y,z)$ et déterminer noyau et image de f. Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?

Exercice 4 Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes, relativement aux bases canoniques au départ et à l'arrivée dans les cas suivants.

1. $u : (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
2. $v : (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mapsto (x+y+z+t, x+y+z, x+y, z) \in \mathbf{R}^4$.
3. $w : \mathrm{P} \in \mathbf{R}_3[x] \mapsto (\mathrm{P}(0), \mathrm{P}'(0), \mathrm{P}''(0)) \in \mathbf{R}^3$.
4. $f : (x,y,z) \in \mathbf{R}_3 \mapsto \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z+y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbf{R})$.
5. $g : \mathrm{M} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{R}) \mapsto {}^t\mathrm{M} + \mathrm{M} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{R})$.
6. $h : \mathrm{P} \in \mathbf{R}_4[x] \mapsto \mathrm{P}' - \mathrm{P}(0)x^4 + \mathrm{P} \in \mathbf{R}_4[x]$.

Exercice 5

1. Montrer que $\mathscr{B} = \left(1, X-1, (X-1)^2\right)$ est une base de $R_2[X]$
2. Montrer que $f : P \in \mathbf{R}_2[x] \mapsto 2(X+1)P - \left(X^2 - 2X + 1\right)P'$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[x]$/
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 6 Soit u définie sur $\mathbf{R}_4[x]$ par $u(P) = P(x+1)$.

1. Prouver que u est linéaire.
2. Prouver que u est inversible.
3. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
4. Quelle est l'inverse de la matrice obtenue ?

Exercice 7 Déterminer la matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$u(x, y, z) = (x - y + z, x + y - 2z, z - x - y)$$

dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. En déduire une expression de u^3.

Exercice 8 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f est nilpotent d'ordre n. Cela signifie que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ mais que $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner la matrice de f^k.
4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, donner la matrice de $(\lambda I_n + f)^k$.

Exercice 9 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3 et muni d'une base (e_1, e_2, e_3) défini par

$$f(e_1) = \frac{1}{2}(e_2 + e_3), f(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3), f(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2).$$

1. Déterminer la matrice M de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et donner son inverse.
3. Justifier que $P^{-1}MP$ est la matrice de f dans une base de E à déterminer.
4. Montrer que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.
6. Déterminer $\lim \left(P^{-1}MP\right)^n$.
7. En déduire $\lim M^n$.
8. Soit $x \in E$, déterminer $\lim f^n(x)$.

3. AUTOUR DU RANG

Exercice 10 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 12 & 18 \\ 12 & 15 & 18 & 28 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

1. Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbf{R}$, le rang de la matrice $A - \lambda I_3$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Montrer que $B' = (e_1 - e_3, e_2, 3e_1 - e_3)$ est une base de E.
3. Soit u un endomorphisme représenté par A dans la base B. Déterminer la matrice de u dans la base B'.
4. En déduire la matrice de u^n dans la base B'.
5. En déduire la matrice de u^n dans la base B.

On rappelle que si P est la matrice de changement de base de B dans B' et que si A représente u dans la base B, alors $P^{-1}AP$ représente u dans B'.

4. POLYNÔMES ANNULATEURS

Exercice 12 Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux matrices X et Y dans $M_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que $M = X\,{}^tY$.
2. En déduire que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.
3. En déduire une formule pour M^n.

Exercice 13

1. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \mathrm{I}d)^2 = 0$, où $\mathrm{I}d$ désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
   a) Déterminer $(f - \mathrm{I}d)^2 + f \circ (2\mathrm{I}d - f)$.
   b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = (f - \mathrm{I}d)^2(x) + (f \circ (2\mathrm{I}d - f))(x)$.
   c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$.

2. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f \circ (f - \mathrm{I}d) \circ (f - 4\mathrm{I}d) = 0$$

   a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant :

$$\frac{1}{4}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-4) + \mathrm{XP}(\mathrm{X}) = 1$$

   b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{K}er(f) \oplus \mathrm{I}m(f)$.

3. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p \geqslant 2$), et tel que $\mathrm{P}(0) = 0$ et $\mathrm{P}'(0) \neq 0$.
   a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \ldots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $\mathrm{P} = a_1\mathrm{X} + \cdots + a_p\mathrm{X}^p$.
   b) En déduire que $\mathrm{K}er(f) \cap \mathrm{I}m(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{K}er(f) \oplus \mathrm{I}m(f)$.
   c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?

5. EXERCICE EM LYON

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, x, \ldots, x^n)$ la base canonique de E. On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(\mathrm{P}) = \frac{1}{n}x(1-x)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}.$$

1. a) Montrer que φ est une application linéaire.
   b) Calculer $\varphi(x^n)$.
   c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. a) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
   b) Soit P un polynôme non nul de $\ker(\varphi)$. Montrer que P admet 1 comme unique racine et que P est de degré n.
   c) En déduire une base de $\ker(\varphi)$.