

TD 3 - Nombres réels

1. QUELQUES ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes, (après avoir vérifié convenablement l'ensemble de définition!)

- $5(\frac{x}{2} - 5) - 2\frac{x}{3} + 3 = 5,$
- $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = x + \sqrt{2},$
- $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x-1}{x-5},$
- $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{-x+2}{x-2} + 1,$
- $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{-x+2}{x-2},$
- $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+2},$
- $\sqrt{x^2+9} = 2,$
- $|x-2| = 2,$
- $|2x-3| - |2-x| = 1,$
- $\sqrt{x-3} = x+2,$
- $x-1 = \sqrt{x-1}.$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x .
 λ est un paramètre réel.

- $(\lambda^2 - 1)x = \lambda + 1,$
- $(\lambda^2 - 1)^2 x^2 - 2(\lambda^2 - 1)x = -1,$
- $(\lambda - 4)x^2 - 2(\lambda - 2)x + \lambda - 1 = 0.$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes

- $(x^2 - 4x + 3)(x - 1) < 0,$
- $\frac{x^2-1}{x+3} \geq \frac{x+3}{x-1},$
- $\frac{x-2}{x-3} \leq \frac{x+1}{x+2},$
- $\frac{x-2}{x-3} \leq \frac{-2x+1}{x+2},$
- $|x-3| > 5,$
- $|-3x+1| \leq |x+2|,$
- $\sqrt{x-2} > 2x+2,$
- $\sqrt{3-x} \leq x-4,$

Exercice 4 Résoudre l'inéquation suivante (avec un paramètre $m \in \mathbf{R}$) :

$$(m^2 - 1)x = m + 1.$$

Exercice 5 Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.

2. BORNES

Exercice 6 Pour chacune des parties de $\mathbf{R}$ décrites, déterminer s'ils existent leur minimum, maximum, borne inférieure, borne supérieure.

- $\mathbf{R}_+,$
- $\mathbf{R}^*,$
- $\{1, 2, \dots, 9\},$
- $] -1, 2[\cup \{3\},$
- $\{1 + 2n, n \in \mathbf{N}\},$
- $]1, 2] \cap [\frac{3}{2}, 9[,$
- $\{\frac{1}{1-x}, x \in]1, +\infty[,$
- $\{\frac{1+(-1)^n}{n}, n \in \mathbf{N}^*\},$
- $\{\cos(n), n \in \mathbf{N}\}.$

Exercice 7 Soient A et B deux parties majorées de $\mathbf{R}$. On définit l'ensemble $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

- Montrer que $A + B$ est majoré.
- Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure.

3. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. On suppose que A et B sont minorées. Que peut-on dire de A + B?
5. Dans cette dernière question, on ne suppose plus que A et B sont majorées. On suppose que A + B est majorée. A-t-on nécessairement A et B majorées?

Exercice 8 Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. Démontrer que A est majoré, B est minoré et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

3. INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Exercice 9 Avec l'inégalité triangulaire, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$|2x - 3| + |6 - 2x| = 3.$$

Exercice 10 On considère le sous ensemble de $\mathbb{R}$:

$$A = \{\cos(a + b) - \sin(a) + \sin(b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que $A \subset [-3, 3]$,
2. Montrer que A admet un maximum.

4. PARTIE ENTIÈRE, VALEUR ABSOLUE

Exercice 11 Étudier la fonction réelle f définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. On montrera notamment qu'elle est périodique et on donnera une période.

Bonus. Faire de même avec $g(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 12

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
3. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 13 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right) \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 14 Résoudre l'inéquation $x^2 - 4|x| < 5$.