TD 30-31 - Fonctions convexes

Exercice 1 Déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont concaves, convexes. Déterminer les éventuels points d'inflexions.

1. arctan
2. $x \longmapsto e^x + e^{-x}$
3. $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$
4. tan
5. cos
6. $x \longmapsto \left(\frac{1}{x}\right)$
7. $x \longmapsto e^{x^2}$
8. $x \longmapsto |x|$
9. $x \longmapsto \sqrt{x}$

Exercice 2 Montrer que pour tout $(x, y) \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 3 Soit f une fonction polynomiale de degré trois. Montrer que f admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

Exercice 4 Soit f une fonction convexe strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que pour tout $x > 1$ on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant f(1) - f(0).$$

2. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 5

1. Montrer que $x \longmapsto x\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout x, y, a, b strictement positifs,

$$x\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\ln\left(\frac{y}{x}\right) \geqslant (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

Exercice 6

1. Étudier la convexité de $f : x \in \mathbf{R} \mapsto \ln(1+e^x)$.
2. Soit $x, y \in \mathbf{R}_+$ et $\lambda \in [0,1]$, montrer que

$$1 + x^\lambda y^{1-\lambda} \leqslant (1+x)^\lambda (1+y)^{1-\lambda}.$$

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire réelle finie et ϕ une fonction convexe sur un intervalle I tel que $X(\Omega) \subset I$. Montrer que $\phi(E(X)) \leqslant E(\phi(X))$.

Exercice 8 Soit ϕ une fonction convexe sur $\mathbf{R}$ et f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \phi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right).$$

2. En déduire que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))dt.$$

Exercice 9 En utilisant une inégalité de convexité, montrer que pour tout réels strictement positifs $x_1, \dots x_n$,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

On pourra utiliser l'inégalité arithmético-géométrique vue en exemple.

Exercice 10 Soit $f \in C^1(I)$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$ un point critique de I. Montrer que f admet un minium global en x_0.

Exercice 11 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f est nilpotent d'ordre n. Cela signifie que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ mais que $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner la matrice de f^k.
4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, donner la matrice de $(\lambda I_n + f)^k$.

Exercice 12 Soit $A \in \mathbf{R}[x]$ et f l'application définie sur $\mathbf{R}[x]$ par $f(A) = R$ où R est le reste de la division euclidienne de P par A.

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.