TD 32 - Approximation et convergence de VA discrètes

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que pour tout $c \in [a, b]$,

$$\frac{E[X] - c}{b - a} \leq P(X \leq c) \leq \frac{E[X] - a}{c - a}.$$

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que pour tout $a \in \mathbf{R}$, $P(X \geq a) \leq E[e^{X-a}]$.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Montrer que

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda + 1}.$$

Exercice 4 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètres $(p_n)_n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{1}{n} \sum p_i\right| \leq \varepsilon\right) = 1.$$

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire discrète admettant un variance σ^2 . Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$P(|X - E(X)| < \alpha\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Exercice 6 Quel est le nombre de lancers à effectuer pour être sûr avec une probabilité supérieure à 0.95 que celui-ci a une probabilité $\frac{1}{6}$ de tomber sur la face 1?

Exercice 7 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On réalise successivement une même épreuve de Bernoulli (qui a une probabilité de réussite $p_n \in]0, 1[$ de façon indépendante à des temps $1/n, 2/n, \dots$. On note T_n le temps passé à attendre le premier succès.

1. Quelle est la loi de (nT_n) .
2. On suppose que np_n converge vers $\lambda > 0$. Étudier la convergence des $P(T_n = x)$ pour $x \in T_n(\Omega)$.
3. Que conclure?