

TD 6 - Ensembles et applications

1. ENSEMBLES

Exercice 1 Écrire avec des quantificateurs les sous ensembles des suites réels suivants :

- | | |
|---|---|
| 1. A : l'ensemble des suites majorées | 4. D : l'ensemble des suites décroissantes, |
| 2. B : l'ensemble des suites minorées, | 5. E : l'ensemble des suites convergentes, |
| 3. C : l'ensemble des suites croissantes, | 6. F : l'ensemble des suites bornées. |

Montrer que $F = A \cap B$. Donner deux autres inclusions vraies et deux inclusions fausses.

Exercice 2 Déterminer l'ensemble des parties des ensembles $\{0, 1, 2, 3\}$ et $\{A, B, C\}$.

Exercice 3 Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$. Don-

ner $\text{card}(E^p)$ et $\text{card}(\mathcal{P}(E^p))$.

Exercice 4 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que $B = C$ si et seulement si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 5 Expliciter les trois ensembles suivants :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[, \quad \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p}, \frac{2p+1}{p} \right[, \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k, -\frac{1}{k} \right] \cup \left[\frac{1}{k}, k \right] \right).$$

Exercice 6 Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2} \right[\quad \text{et} \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2 \right].$$

Exercice 7 Soient A et B deux parties d'un ensemble E . La différence symétrique de A et B est l'ensemble défini par

$$A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B.$$

1. Montrer que $A \Delta B = B \setminus A \cup A \setminus B$.
2. Faire un dessin!
3. Que dire si $A \Delta B = A \cap B$.
4. Soit C une partie de E . Montrer que $A \Delta B = A \Delta C$ si et seulement si $B = C$.
5. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $A \Delta X = \emptyset$.
6. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $A \Delta X = S$ où S est un ensemble donné.

Exercice 8 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Établir l'égalité :

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

Exercice 9 Soit A et B deux parties de E . Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations

1. $A \cap X = B$
2. $A \cup X = B$

2. APPLICATIONS

Exercice 10

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer $f([-2, 3])$ et $f^{-1}([-1, 2])$.
2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, xy - y^3)$. Est-elle injective? surjective?

Exercice 11 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbf{R}$
2. Donner l'image directe de $\mathbf{R}$ par f .
3. Donner $f([\mathbf{R}_-])$, $f(\mathbf{R}_+)$ et $f([0, 1])$.
4. Donner l'image réciproque par f de $\mathbf{R}_-$, $\mathbf{R}_+$, $[10, 20[$, $[10, +\infty[$.

Exercice 12 Soit $S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $S(n) = n + 1$.

1. Montrer que S est bijective.
2. Que dire de $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$?
3. Que dire de $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?

Exercice 13 Les applications sont elles injectives, surjectives, bijectives? Si elles sont bijectives, donner la bijection réciproque.

1. $f : k \in \mathbb{N} \longrightarrow 3k + 1 \in \mathbb{N}^*$.
2. $g : \mathbb{R} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $g(x) = \frac{3+2x}{x-5}$.
3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $h(y) = \sqrt{y^2 + y + 1}$.
4. $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $i(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$.
5. $j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $j(x, y) = (x + 2y, 5y - 3x)$.

Exercice 14 Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$. Démontrer que :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
5. $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 15 Déterminer des bijections entre les ensembles suivants :

1. $[0, 1]$ et $[a, b]$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés),
2. les entiers naturels pairs et les entiers impairs
3. les entiers naturels et les entiers relatifs
4. les entiers naturels et les entiers pairs
5. $]0, 1]$ et $[0, +\infty[$

6. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.

Exercice 16 Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ des fonctions. Montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective, alors f et g le sont aussi.

Exercice 17 Soient E, F, G et H des ensembles, $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Qu'en est-il de g ?
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. Qu'en est-il de f ?
3. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives. La réciproque est-elle vraie?

3.

POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 18 Soit A une partie de E , on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E , f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$.
2. $f g$.
3. $f + g - f g$.