TD SUITES EDHEC

Les exercices suivants sont des exercices sur les suites, abordables en première année, issus du concours EDHEC. A terme, il faut les connaître comme votre poche. Les exercices sont adaptés :

- pour remplacer Scilab par Python
- pour être abordables dès à présent

Exercice 1 [EDHEC S 2021]

1. Question préliminaire : on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

   a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.
   c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

   d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et supérieur ou égal à 1.

   b) Étudier les variations de la suite (u_n), puis établir que la suite (u_n) diverge et donner sa limite.

   c) Compléter le script `Python` suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

```
n=1
u=1
S=1
while S <= 1000:
        u = _______
        S = _______
        n=n+1
print(_____)
```

3. Recherche d'un équivalent de u_n.

   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{n+1} - u_n\right) = \dfrac{1}{2}$.

   b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$, puis en déduire que la suite $\left(u_{n+1} - u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   c) Utiliser la première question pour établir que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$.

4. a) Exprimer S_n en fonction de u_n puis en déduire un équivalent de S_n pour n au voisinage de $+\infty$. (C'est à dire trouver une suite v_n explicite avec

$$\lim \frac{S_n}{v_n} = 1.$$

   b) Compléter le script `Python` suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2c) sans calculer S_n :

```
n=1
u=1
while u <= _______:
        u=________
        n=+1
print(_____)
```

Exercice 2 **[EDHEC S 2017]**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. a) Écrire une fonction Python `f` , qui prend en entrée x et n et renvoie $f_n(x)$.
   b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f` , en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée `f`.

```
def f(x,n):
        if x==1 then:
                y=_______
        else:
                y=________
return(______)
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0,1]$, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.
3. a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.
   b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.
4. a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.
   b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.
5. On suppose que f_n a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
def fonction(n):
        x=0
        while f(x,n)<1:
                x =+ 0.001
        return(x)
```

Quel est le lien entre la fonction codée et α_n ?

Exercice 3 [EDHEC S 2016]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.
On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.
   b) Vérifier que chaque terme de la sutie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.
2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u=1
n=0
while u>0.00001:
      u = exp(-u)/u
      n=n+1
print(n)
```

```
u=1
n=0
while u<100000:
      u = exp(-u)/u
      n=n+1
print(n)
```

3. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$$

   b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.
   c) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
4. a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.
   b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On pose : $h(x) = \begin{cases} (f\circ f)(x) & \text{, si } x > 0 \\ 0 & \text{, si } x = 0 \end{cases}$
   a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.
c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.