

Devoir à rendre le lundi 19 septembre.

EXERCICES

Exercice 1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer par récurrence que pour tout entier n ,

$$u_n = 3^n - 2^n.$$

Exercice 2 Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair}.$$

On pourra raisonner par double implication, et utiliser un raisonnement par contraposée pour le sens difficile.

Exercice 3 Montrer par analyse synthèse que toute fonction réelle (définie sur $\mathbf{R}$) se décompose de façon unique comme la somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire.

Exercice 4 Les assertions suivantes sont-elles vraies? Justifier. On pourra s'aider de ce qui a été fait DM1. S'il y a des questions que vous avez déjà faites au DM1, ce n'est pas la peine de les refaire.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 2 \Rightarrow x \geq 4$,
2. $\exists x \in \mathbf{R}_+, x < \sqrt{x}$,
3. $\forall (x, x') \in (\mathbf{R} \setminus \{-1\})^2, x \neq x' \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \neq \frac{x'+1}{x'-1}$,
4. $\forall N \in \mathbf{N}^*, \exists n \in \mathbf{N}^*, 2^n \geq N$.

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$. Les réels m et λ sont constantes qui pourront nous servir à faire des disjonctions de cas.

1. $(\lambda - 1)x^2 = 2x + 1$,
2. $\cos(m)^2 x^2 + 2 \sin(m)x - 1 = 0$.

CORRECTION

Exercice 1. On raisonne par récurrence double pour démontrer pour tout n la propriété

$$P(n) : u_n = 3^n - 2^n.$$

Initialisation (double). $P(0)$ est vraie car $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = u_0$. $P(1)$ est vraie car $3 - 2 = 1 = u_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Prouvons $P(n+2)$. Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 3u_n \\ &= 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) \\ &= 15 \times 3^n - 10 \times 2^n - 6 \times 3^n + 6 \times 2^n \\ &= 9 \times 3^n - 4 \times 2^n \text{ en regroupant les termes} \\ &= 3^{n+2} - 2^{n+2}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre $P(n+2)$ et donc l'hérédité.

Conclusion. Par principe de récurrence double, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^n.$$

Exercice 2. On raisonne par double implication.

Sens direct. Supposons n pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. Donc $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, ce qui prouve que n^2 est pair.

Sens réciproque. On le démontre par contraposée, c'est à dire qu'on montre que

$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair.}$$

Soit n un entier impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$, donc

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Ce qui prouve que n^2 est impair.

Par double implication, on a montré l'équivalence.

Exercice 3. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$.

Analyse. Supposons que f s'écrive $f = p + i$ où p est une fonction paire et i une fonction impair. Alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x).$$

Dès lors $f(x) + f(-x) = 2p(x)$ donc $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$. De même en calculant $f(x) - f(-x) = 2i(x)$ on obtient $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Synthèse. On vérifie que les fonctions p et i ainsi définies sont respectivement paires et impaires.

$$\forall x \in \mathbf{R}, p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x).$$

Ainsi p est paire. De même

$$\forall x \in \mathbf{R}, i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x)$$

donc i est impaire.

On conclut que toute fonction réelle f se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 4.

1. C'est faux. Il suffit de prendre 3 comme contre exemple.
2. C'est vrai, il suffit de prendre $\frac{1}{2}$ comme exemple (ou tout réel strictement compris entre 0 et 1.)
3. C'est vrai. Démontrons la contraposée. Il suffit de fixer (x, x') quelconques dans $(\mathbf{R} \setminus \{-1\})^2$ et de montrer que $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1} \Rightarrow x = x'$. Fixons les. Alors,

$$(x+1)(x'-1) = (x-1)(x'+1) \text{ donc } xx' - x + x' - 1 = xx' - x' + x - 1$$

$$\text{donc } -x + x' = -x' + x$$

$$\text{donc } 2x = 2x'$$

$$\text{donc } x = x'.$$

Ce qui conclut la démonstration.

4. C'est vrai. On peut raisonner par analyse.

$$2^n \geq N \iff n \geq n \ln(2) \geq \ln(N) \iff n \geq \frac{\ln(N)}{\ln(2)}.$$

Il suffit de prendre $n = \lfloor \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \rfloor + 1$ ou toute valeur de n au dessus.

Exercice 5.

1. On traite par disjonction de cas selon si $\lambda = 1$ ou $\lambda \neq 1$.
 - a) si $\lambda = 1$, l'équation devient $2x + 1 = 0$ qui a pour unique solution $x = -1/2$.
 - b) sinon, c'est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 4 + 4(\lambda - 1) = 4\lambda$.
On a une nouvelle disjonction de cas :
-si $\lambda < 0$, on n'a aucune solution. -si $\lambda = 0$, on a une unique solution $x = -1$ si
 $\lambda > 0$ (mais différent de 1), on a deux solutions

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{\lambda}}{2(\lambda - 1)} = \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}.$$

2. La disjonction de cas se fait d'abord sur la valeur de $\cos(m)$. Si $\cos(m) = 0$, autrement dit si $m = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour un certain entier k , alors c'est une équation du premier degré qui a pour solution

$$x = \frac{1}{2 \sin(m)}.$$

où $\sin(m) = +1$ ou -1 selon la valeur de l'entier k .

Sinon, c'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4 \sin^2(x) + 4 \cos^2(x) = 4 > 0$. Donc l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-2 \sin(m) + 2}{2 \cos(m)^2} = \frac{-\sin(m) + 1}{\cos(m)^2} \text{ et } x_2 = \frac{-\sin(m) - 1}{\cos(m)^2}.$$