Devoir surveillé 1

Date : 21 septembre 2022

Durée : 4h

Quelques consignes :

- Accordez un grand soin à la présentation et à la rédaction des résultats. Cela, comme aux concours, sera largement pris en compte dans l'évaluation de la copie. Utilisez le brouillon !
- Traitez les questions dans l'ordre. Encadrez les résultats. Laissez une marge suffisante pour les points et commentaires. Revenir sur une nouvelle page au début de chaque exercice. Numérotez les pages (en indiquant bien le nombre total de pages).
- Il est tout à fait possible de sauter une question en l'indiquant clairement sur la copie, par exemple en laissant un espace vide après avoir indiqué le numéro de la question. C'est la bonne chose à faire quand on bloque sur une question, et il est vain d'essayer d'arnaquer le correcteur : cela serait sévèrement sanctionné.
- Dernier conseil : les devoirs en prépa et les sujets de concours sont longs. Avancez à votre rythme en utilisant tout le temps qui vous est proposé.
- Les calculatrices et documents sont interdits.
- Barème indicatif : Exercices (12) + Problème (12).

A. EXERCICES

Exercice 1 **Questions de cours.**

1. Rappeler l'inégalité triangulaire.
2. Rappeler le principe de contraposée et le démontrer avec une table de vérité.

Exercice 2 **De la logique, des quantificateurs.**

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Décrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes
   a) f est bornée,
   b) f est nulle sur tout les entiers,
   c) f est décroissante à partir d'un certain réel,

d) f est "surjective" : tout nombre réel est dans l'ensemble des valeurs prises par f.

2. Donner les négations des assertions quantifiées suivantes.
   a) P : "$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = M$",
   b) Q : "$\exists x \geqslant 0, \forall \epsilon \geqslant 0, (\epsilon \leqslant x) \Rightarrow (x = \epsilon)$".
3. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
   a) S : "$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \ln(n) > 2^N$",
   b) T : "$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (\cos(x) = \cos(y)) \Rightarrow (x = y)$",

Exercice 3 **Des récurrences.**

1. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 8 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n - 2 \times (-1)^n.$$

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1, u_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) u_n u_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue x réel

1. $x = \sqrt{2 - x} + 2$,
2. $e^x - 4e^{-x} = 3$,
3. $|2x - 1| + |x - 3| \geqslant 7$,

Exercice 5 Trouver les racines réelles du polynôme

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 28x + 32.$$

Exercice 6 Soient a et b deux réels. En raisonnant éventuellement par analyse-synthèse, trouver une condition nécessaire est suffisante pour qu'il existe une suite géométrique (u_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

B. PROBLÈME - D'APRÈS ECRICOME ECT 2020

On rappelle le théorème suivant.

Théorème 1

1. Toute suite croissante et majorée converge.
2. Toute suite décroissante et minorée converge.

Partie I

On considère la fonction réelle f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note (C_f) sa courbe représentative.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

3. En déduire

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer l'équation de la tangente (T) de (C_f) en 0.
6. Montrer que pour tout $x \in [-1,+\infty[$, $f(x) \leqslant x$.
7. Tracer (C_f) et (T) dans un repère orthonormé. On prêtera attention à la position relative des deux courbes. (La quelle est au dessus de l'autre).

Partie II

Dans cette partie, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u(1) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}.$$

1. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$

2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

3. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

4. Conclure que (u_n) converge et donner sa limite.

Partie III

Dans cette partie, on étudie la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$v(1) = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}.$$

1. En utilisant une question de la Partie I, démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 2, -1 \leqslant v_n \leqslant 0.$$

2. En utilisant une question de la Partie I, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
3. En déduire que (v_n) converge vers un réel ℓ.
4. On admet que si (v_n) converge vers un réel ℓ, $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de la limite ℓ.
5. Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \neq -1$.