Devoir surveillé 1

Date : 21 septembre 2022

Durée : 4h

Quelques consignes :

- Accordez un grand soin à la présentation et à la rédaction des résultats. Cela, comme aux concours, sera largement pris en compte dans l'évaluation de la copie. Utilisez le brouillon !
- Traitez les questions dans l'ordre. Encadrez les résultats. Laissez une marge suffisante pour les points et commentaires. Revenir sur une nouvelle page au début de chaque exercice. Numérotez les pages (en indiquant bien le nombre total de pages).
- Il est tout à fait possible de sauter une question en l'indiquant clairement sur la copie, par exemple en laissant un espace vide après avoir indiqué le numéro de la question. C'est la bonne chose à faire quand on bloque sur une question, et il est vain d'essayer d'arnaquer le correcteur : cela serait sévèrement sanctionné.
- Dernier conseil : les devoirs en prépa et les sujets de concours sont longs. Avancez à votre rythme en utilisant tout le temps qui vous est proposé.
- Barème indicatif : Exercices (12) + Problème (12).

A. EXERCICES

Exercice 1 Questions de cours.

1. Dresser la table de vérité de l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$,
2. Rappeler les lois de De Morgan. Démontrer une des deux.

Exercice 2 De la logique, des quantificateurs.

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Décrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes
   a) f est bornée,
   b) f est nulle sur tout les entiers,
   c) f est décroissante à partir d'un certain réel,
   d) f est **surjective**, c'est à dire que tout réel admet un antécédent par f.
2. Donner les négations des assertions quantifiées suivantes.

a) P : "$\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = M$",
b) Q : "$\forall A > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N, u_n > A$",
c) R : "$\exists x \geqslant 0, \forall \epsilon \geqslant 0, (\epsilon \leqslant x) \Rightarrow (x = \epsilon)$".

3. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
   a) S : "$\forall N \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, \ln(n) > 2^N$",
   b) T : "$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, (\cos(x) = \cos(y)) \Rightarrow (x = y)$",
   c) R : "$\exists x \geqslant 0, \forall \epsilon \geqslant 0, (\epsilon \leqslant x) \Rightarrow (x = \epsilon)$" ?.

Exercice 3 Des récurrences.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$ un réel tel que
$$x + \frac{1}{x} \in \mathbf{Z}.$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}.$$
Donner un exemple de tel x (différent de 1 et -1). Si on n'a pas l'intuition, on pourra essayer de se ramener à une équation du second degré.
2. Soit (u_n) la suite définie par
$$u_0 = 1, u_1 = 8 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 3 \times 2^n - 2 \times (-1)^n.$$
3. Soit (u_n) la suite définie par
$$u_0 = 1, u_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n.$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}, (n+1) u_n u_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue x réel

1. $x = \sqrt{2 - x} + 2$,
2. $e^x - 4e^{-x} = 3$,

3. $|2x-1|+|x-3| \geqslant 7$,
4. $\frac{2x-1}{x+2} \leqslant 1$.

Exercice 5 **Une étude de fonction.**

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ la fonction réelle définie par

$$f(x) = 2\lfloor x \rfloor - x + 1.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) = f(x) + 1$,
2. Étudier f sur un intervalle $[k, k+1[$ où $k \in \mathbf{N}$,
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ vers $\mathbf{R}_+^*$.
4. Donner une représentation graphique de f.

Exercice 6 Trouver les racines réelles du polynôme

$$\mathrm{P}(x) = x^3 - 5x^2 - 28x + 32.$$

B. PROBLÈME - D'APRÈS ECRICOME ECT 2020

On rappelle le théorème suivant.

Théorème 1
1. Toute suite croissante et majorée converge.
2. Toute suite décroissante et minorée converge.

Partie I.

On considère la fonction réelle f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note (C_f) sa courbe représentative.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

3. En déduire
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x).$$
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer l'équation de la tangente (T) de (C_f) en 0.
6. Montrer que pour tout $x \in [-1,+\infty[$, $f(x) \leqslant x$.
7. Tracer (C_f) et (T) dans un repère orthonormé. On prêtera attention à la position relative des deux courbes. (La quelle est au dessus de l'autre).

Partie II

Dans cette partie, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par end
$$u(1) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}.$$

1. Vérifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$
2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
3. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$
4. Conclure que (u_n) converge et donner sa limite.

Partie III

Dans cette partie, on étudie la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$v(1) = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1+v_n+v_n^2}.$$

1. En utilisant une question de la Partie I, démontrer par récurrence que :
$$\forall n \geqslant 2, -1 \leqslant v_n \leqslant 0.$$
2. En utilisant une question de la Partie I, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
3. En déduire que (v_n) converge vers un réel ℓ.
4. On admet que si (v_n) converge vers un réel ℓ, $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de la limite ℓ.
5. Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n \neq -1$.

CORRIGÉ DU PROBLÈME

Partie 1

1. f est une fonction quotient, elle est définie en tout point $x \in \mathbb{R}$ pour lequel $1+x+x^2 \neq 0$. Or cette expression est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 3$ donc le trinôme ne s'annule jamais. Ainsi la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x}{1+x+x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1/x^2 + 1/x + 1}$$

en divisant numérateur et numérateur par x^2.

3. On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+1/x+1/x^2} = 0^+.$$

Par produit,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

De même, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. Par quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1+x+x^2 - x(1+2x}{(1+x+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}.$$

On en déduit les variations de f :

5. L'équation de la tangente est

$$y = f'(0)x + f(0) = x.$$

On obtient $y = x$.

6. Soit $x \geqslant -1$, on a

$$f(x) - x = \frac{x}{1+x+x^2} - x = \frac{x}{1+x+x^2} - \frac{x+x^2+x^3}{1+x+x^2} = \frac{x^2+x^3}{1+x+x^2} = x^2\frac{x+1}{1+x+^2}.$$

Comme le dénominateur est positif, le quotient est du signe $1+x$ qui est donc négatif dès que $x \geqslant -1$.

7.

Partie 2.

1. Soit n entier naturel non nul. On calcule $f(1/n) = \frac{1/n}{1+1/n+1/n^2} = \frac{1}{n+1+1/n}$ en multipliant par n au numérateur et dénominateur.

2. Comme $n+1 < n+1+1/n$, $f(1/n) = \frac{1}{n+1+1/n} \leqslant \frac{1}{n+1}$.

3.On montre la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : pour $n = 1$, $u(1) = 1$ et $\frac{1}{1} = 1$. L'égalité est donc vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$. Comme f est croissante sur $[0,1]$,

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1/n)$$

soit

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \text{ par la question précédente.}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

4. (u_n) est encadrée par deux suites qui tendent vers 0. Par théorème d'encadrement (ou des gendarmes), u_n tend vers 0

Partie 3

.

1. Initialisation. La propriété est vraie au rang 2 car $v_2 = \frac{-2}{1-2+4} = \frac{-2}{3}$.

Hérédité. On suppose la propriété vraie au rang n, autrement dit $v_n \in [-1,0]$. Alors par le tableau de variation, $f(v_n)$ est aussi dans $[-1,0]$. Donc $v_{n+1} \in [-1,0]$.

2. Comme pour $n \geqslant 2, v_n \in [-1,+\infty[$, on sait que $f(v_n) \leqslant v_n$ (par Q.I.6). Soit $v_{n+1} \leqslant v_n$ donc (v_n) est décroissante à partir du rang 2.

3. v est décroissante est minorée par -2, donc elle converge vers un réel ℓ.

4. On résout l'équation $f(\ell) = \ell$. On obtient

$$\frac{\ell}{1+\ell+\ell^2} = \ell$$

ce qui équivaut à $1+\ell+\ell^2 = 1$. Les deux solutions possibles sont 0 et -1. La limite 0 est impossible car la suite est décroissante à partir du rang 2. Ainsi la suite (v_n) converge vers -1.

5. On suppose par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $v_n = -1$. Alors par le tableau de variation, il est obligatoire que $v_{n-1} = -1$. Par récurrence, on montre de proche en proche v_n est la suite constante égale à -1 et donc que $v_1 = -1$, ce qui est absurde. Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n \neq -1.$$