

Devoir surveillé 2

Date : 9 novembre 2022

A.

CALCULS DE SOMMES ET DE PRODUITS - 1H - 5 POINTS

Calculer les sommes et produits suivants :

$$a) \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-n}}{3^{-k}}$$

$$b) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$$

$$c) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$$

$$d) \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)} \text{ (on se ramènera à une somme télescopique).}$$

$$e) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

B.

EXERCICES - 1H30 - 10 POINTS

Exercice 1 Étudier la fonction (domaine de définition, tableau de variations, représentation graphique et bijection réciproque si elle est bijective).

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

Exercice 2 On définit deux suites (u_n) et (v_n) par leurs premiers termes u_0, v_0 et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 1 - \alpha v_n \\ v_{n+1} = 1 - \beta u_n \end{cases}$$

pour des réels strictement positifs α, β fixés avec $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$.

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} - \alpha\beta u_n = 1 - \alpha. \quad (\text{E})$$

- b) On appelle équation homogène associée à l'équation (E) l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - \alpha\beta x_n = 0. \quad (\text{H})$$

Déterminer les suites (x_n) qui vérifient (H).

- c) Montrer que si x_n et y_n vérifient la relation de récurrence (E), alors $(x_n - y_n)$ vérifie la relation (H). En déduire l'expression de $x_n - y_n$.
- d) Dans cette question uniquement, $\alpha\beta \neq 1$. Cherchez une suite constante égale à $C \in \mathbb{R}$ qui vérifie la relation (E).
- e) En déduire que la suite u_n est de la forme

$$u_n = \lambda(\sqrt{\alpha\beta})^n + \mu(-\sqrt{\alpha\beta})^n + C$$

pour certains réels λ, μ .

- f) Dans cette question uniquement, $\alpha\beta = 1$. Cherchez une suite de la forme $x_n = kn$ ($k \in \mathbb{R}$) qui vérifie la relation (E). En déduire la forme de la suite (u_n) .
- g) Prenons $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $u_0 = v_0 = 1$. Donner une expression explicite de la suite (u_n) (en déterminant toutes les constantes). En déduire une expression de v_n .

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) + x$.

- a) Dresser le tableau de variations de f (avec les limites).
- b) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un ensemble à déterminer.
- c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $y_n > 0$ tel que

$$y_n + \ln(y_n) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi on définit une suite $(y_n)_{n \geq 1}$.

- d) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $y_n \in]0, 1]$.
- e) Montrer que (y_n) est monotone.
- f) Montrer que (y_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ln(\ell) + \ell = 0$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

f est-elle injective? surjective, bijective?

Dans tout le problème, $I =]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. On définit sur I les fonctions f et g par

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \text{ et } g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

- a) Vérifier que f et g sont bien définies sur I .
- b) Les fonctions f et g sont-elles paires? impaires?
- c) Factoriser le polynôme

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

Indication : le résultat sera à mettre sous la forme $a(x - r_1)^2(x - r_2)$ pour des réels a, r_1, r_2 à déterminer.

- d) On définit une fonction u par $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$. Justifier que u est dérivable sur I et que

$$\forall x \in I, u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos(x)^2}.$$

- e) En déduire les variations de u sur I .
- f) On définit une fonction v par $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$. Trouver un polynôme $Q(x)$ de degré 2 (c'est à dire de la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$) tel que

$$\forall x \in I, v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}.$$

- g) En déduire les variations de v sur I .
- h) Montrer que :

$$\forall x \in I, g(x) < x < f(x).$$

- 2. a) Calculer $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.
 - b) En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$, $\tan(\frac{\pi}{12})$.
 - c) En utilisant la **question 1.h**, en déduire un encadrement de π .
3. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \text{ et } b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, justifier que

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin(\theta)^2.$$

b) En déduire que pour tout entier n

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

c) A l'aide de la **question 1.h)**, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right).$$

Remarque C.1 — Le sujet Ecriceome propose la question : montrer que les membres à gauche et à droite dans la dernière inégalité convergent vers π . Nous ne pouvons pas encore faire cette question, le résultat est donc admis pour la suite. Ainsi les suites

$$u_n = 9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} \text{ et } v_n = 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right)$$

sont des approximations de π .

d) Montrer que si $v_n - u_n < \epsilon$ alors $|v_n - \pi| < \epsilon$ et $|u_n - \pi| < \epsilon$.

e) En utilisant la remarque précédente, compléter la fonction **Python** suivante qui prend en entrée un réel positif **epsilon** et renvoie à l'aide des suites étudiées une approximation π à ϵ près ainsi que le nombre de termes de a_n et b_n calculés (à l'aide des relations $(*)$ et $(**)$).

```
1 import numpy as np
2
3 def approxPi(epsilon):
4     k = 0
5     a = np.sqrt(3)/2
6     b = 1/2
7     while _____:
8         a = _____
9         b = _____
10        k = _____
11    return(_____)
```

Remarque C.2 — La sujet contient aussi deux autres questions d'algorithmique sur des parties que nous n'avons pas traitées. Le sujet était par ailleurs rédigé en Scilab, conformément à l'ancien programme, mais cela ne change pas beaucoup de choses.