Devoir surveillé 3

Date : 4 janvier 2023

A. EXERCICES RAPIDES - 45 MINUTES

Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + \quad + z = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ 5x - y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 2 Rappeler la définition de la loi Binomiale. Donner son espérance et sa variance (sans preuve).

Exercice 3 Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que

$$\forall x \in I, f(x)^2 = 2023.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 4 Donner le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 6x + 9}{-x^2 + 5x + 6}.$$

Donner ses limites aux bornes du domaine de définition. La fonction est-elle prolongeable par continuité en certains points?

B. EXERCICES

Exercice 5 On rappelle que la probabilité d'un événement B est notée $P(B)$.

On dispose d'une urne U_0 contenant deux boules noires et deux boules blanches, et d'urnes $U_1, U_2, U_3, \dots$ contenant chacune deux boules blanches.

On effectue des tirages selon le protocole suivant :

1. On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_0 , une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_1 .
2. On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_1 , une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_2 .
3. On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_2 , une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_3 , et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne U_{n-1} , mais avant de procéder au tirage suivant. (*Pour comprendre l'expérience, n'hésitez pas à faire un dessin!*)

On pose $X_0 = 2$.

1. a) Montrer que la loi de la variable aléatoire X_1 est donnée par :

$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}, P(X_1 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}$$

b) Calculer l'espérance de X_1 .

2. Pour tout entier naturel k , on note A_k l'événement : "on pioche deux boules noires dans l'urne U_k ".

Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, l'événement $(X_n = 2)$ à l'aide de certains des événements A_k et en déduire que $P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

3. a) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2)$$

b) Montrer ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

c) Donner la valeur de $P(X_n = 0)$ en fonction de n .

4. a) Calculer, pour tout entier naturel n , l'espérance de X_n .
- b) Déterminer la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = xe^{-1/x}.$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et conclure que f est prolongeable par continuité en 0. On continuera à noter f la fonction prolongée.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et conclure que f est dérivable en 0.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$ (avec les limites).
4. a) Calculer

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{-u} - 1}{u}.$$

- b) En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x + 1 = 0$$

- c) Donner la nature et l'équation de l'asymptote de la courbe représentative de f en $+\infty$.
5. Dans cette dernière partie, on définit une suite par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a) Montrer que (u_n) converge.
 - b) Déterminer la limite de (u_n) .
 - c) Écrire un programme Python qui prend en entrée un flottant epsilon ($\varepsilon > 0$) et qui renvoie le premier rang n pour lequel $u_n < \varepsilon$.

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'expérience suivante : dans une urne (U_n) on place n boules numérotées de 1 à n . On tire au hasard une boule dans l'urne et on note k le numéro obtenu.

- si $k = 1$, l'expérience est terminée,
- si $k > 1$, on retire les boules numérotées de k à n de l'urne et on recommence.
- On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de tirage faits pour obtenir la boule 1.
- Pour tout k , on définit la variable aléatoire Y_k par

$$Y_k = \begin{cases} \text{le numero de la } k - \text{ième boule tirée si ce tirage a eu lieu} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- On définit I_n la variable aléatoire du numéro de la première boule tirée.

1. Reconnaître la loi de I_n .
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$P_{[I_n=1]}(X_n = k).$$

3. Pour tout $n \geq 2$, montrer que

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, P_{[I_n=k]}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j - 1).$$

4. Déterminer les lois de X_1 et X_2 .
5. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
6. Déterminer $X_n(\Omega)$.
7. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
8. Montrer que pour tout $n \geq 2, j \geq 2$,

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1).$$

On utilisera le système complet d'événements $([I_n = k], 1 \leq k \leq n)$.

9. Pour $n \geq 2, j \geq 2$, calculer

$$nP(X_n = j) - (n - 1)P(X_{n-1} = j).$$

En déduire que pour tout $n \geq 2$ et $j \geq 1$,

$$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1).$$

10. Montrer que

$$\forall n \geq 2, E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}.$$

En déduire $E(X_n)$ (la somme ne se simplifie pas).

Exercice 8 On fixe un réel $x \in \mathbb{R}$ Le but de cet exercice est de déterminer la limite de la suite $(S_n(x))$ définie par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

1. Écrire un programme Python qui prend en entrée un flottant x et un entier n et qui renvoie $S_n(x)$.
2. Rappeler, sans démonstration, la limite de $u_n = \frac{|x|^n}{n!}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Chercher un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ (dépendant de x) tel que pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n.$$

4. En déduire que $\forall n \geq n_0$,

$$u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}.$$

Retrouver le résultat de la question 2.

5. On définit deux suites de fonctions pour tout réel x par

$$f_n(x) = e^{-x} S_n(x) \text{ et } g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \frac{-e^{-x} x^n}{n!} \text{ et } g'_n(x) = e^{-x} x^{n-1} \frac{n-2x}{n!}.$$

6. A l'aide des variations de f_n et g_n sur $\mathbb{R}_+$, montrer que

$$f_n(x) \leq 1 \leq g_n(x).$$

En déduire qu'alors pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 2x$,

$$0 \leq e^x - S_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}.$$

Conclure.

7. Toujours pour $x \geq 0$, écrire un programme Python qui prend entier un flottant strictement positif ϵ et renvoie une approximation de e^x à ϵ près.

8. En étudiant les variations de f_{2n} et f_{2n+1} sur $] -\infty, 0[$. Montrer que pour tout $x < 0$,

$$f_{2n+1}(x) \leq 1 \leq f_{2n}(x).$$

En déduire que $(S_{2n}(x))$ et $(S_{2n+1}(x))$ convergent toutes les deux vers e^x . Conclure.