DEVOIR SURVEILLÉ # 4

Date : 22 février 2023

A. CALCUL

1. Réaliser la division euclidienne de x^3+1 par $x+2$.
2. En déduire une primitive de

$$f : x \mapsto \frac{x^3+1}{x+2} \text{ sur }]-2,+\infty[.$$

B. EXERCICES

Exercice 1 On définit une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Soit P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 - x - 6.$$

   Montrer que $P(A) = 0_2$.
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Expliquer pourquoi il existe des réels a_n et b_n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^n = Q(x)P(x) + a_n x + b_n.$$

3. En évaluant cette égalité pour des valeurs de x bien choisies, déterminer a_n et b_n.
4. Justifier que $A^n = a_n A + b_n I_2$.
5. Calculer A^n.

Exercice 2 On cherche à déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt.$$

1. Pour tout $n \in \mathrm{N}^*$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Montrer que (u_n) est majorée par $\ln(2)$. *On pourra calculer* $\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$.
5. En écrivant $\ln(2) - u_n$ sous forme d'intégrale, montrer que

$$\ln(2) - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

6. Conclure.

Exercice 3

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, calculer $\sin(\frac{\pi}{2} - t)$.
2. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt.$$

3. A l'aide du changement de variable $t = \sin(s)$ que l'on justifiera, calculer

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t}.$$

Exercice 4

On considère une suite de polynômes (T_n) définie par

$$\mathrm{T}_0 = 1, \mathrm{T}_1 = 2x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_{n+2} = 2x\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n.$$

1. Calculer T_2.
2. a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de T_n est n. Déterminer le coefficient dominant de T_n.
   b) Montrer que si n est pair, T_n est une fonction paire. Montrer que si n est impair, T_n est une fonction impaire.
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}_n(1)$ (en fonction de n).
4. a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

   b) En déduire que T_n admet n racines distinctes dans $]-1, 1[$. On les explicitera.
   c) Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{T}_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur du produit

$$\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}.$$

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}(x) = \prod_{k=0}^{n} (x-k).$$

1. Montrer qu'il existe un réel $r_n \in]0,1[$ tel que $\mathrm{P}'(r_n) = 0$.
2. Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, montrer qu'il existe $r_{n,k} \in]k, k+1[$ tel que $\mathrm{P}'(r_{n,k}) = 0$.
3. En déduire que P' admet exactement n racines.
4. En déduire que le réel r_n de la question 1) est unique.
5. Justifier que $f : x \mapsto \ln(|\mathrm{P}(x)|)$ est dérivable sur $]0,1[$ et que

$$\forall x \in]0,1[, f'(x) = \frac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}.$$

6. En admettant que $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, en déduire que

$$\lim r_n = 0.$$

C. THÉORÈME DE WEIERSTRASS

Le but de ce problème est de démontrer le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par les fonctions polynomiales.

Théorème 1 | Théorème de Weierstrass

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. On peut trouver une suite de polynômes P_n tels que

$$\lim_n \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| = 0.$$

Pour simplifier la démonstration on supposera :

- que $[a,b] = [0,1]$ (ceci simplifie légèrement les calculs mais n'est pas fondamentalement utile)
- que f est de classe C^1 sur $[a,b]$ (cela rendra la démonstration plus abordable).

C.1. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans cette partie, X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies.

1. Montrer que l'application

$$t \in \mathbb{R} \mapsto E[(X+tY)^2]$$

est un polynôme du second degré.

2. Justifier que le discriminant du polynôme est négatif. En déduire **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$E[XY] \leqslant \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}.$$

Dans la suite du problème, n est un entier naturel non nul.

C.2. Une variable aléatoire

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1]$.

1. On définit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Quelle est la loi suivie par S_n, sa variance et son espérance ?
2. En déduire la loi de $\frac{S_n}{n}$. Quelle est sa loi et son espérance ?

3. On définit la fonction

$$\mathrm{P}_n : x \in [0,1] \mapsto \mathrm{E}[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)].$$

Montrer que P_n est définie par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

4. Justifier que $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[x]$.
5. Après avoir justifié que $f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(x)x^k(1-x)^{n-k}$, montrer que

$$\forall x \in [0,1] |f(x) - \mathrm{P}_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|.$$

6. Montrer qu'il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - \mathrm{P}_n(x)| \leqslant \mathrm{M}\sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \mathrm{ME}\left[\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right|\right].$$

(*C'est ici qu'on doit utiliser que* $f \in \mathrm{C}^1([0,1])$.)

C.3. Fin de la démonstration.

1. En déduire que

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - \mathrm{P}_n(x)| \leqslant \mathrm{M}\sqrt{\mathrm{E}\left[|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x|^2\right]} = \sqrt{\mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)}.$$

2. En déduire que

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - \mathrm{P}_n(x)| \leqslant \frac{\mathrm{M}x(1-x)}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{4\sqrt{n}}.$$

3. Conclure la démonstration du théorème.