

DEVOIR SURVEILLÉ # 4

Date : 22 février 2023

A. CALCUL

B. EXERCICES

Exercice 1

1. Calcul.
2. Par le théorème de division euclidienne, il existe un polynôme Q et un polynôme de degré strictement inférieur à 2 $R = a_n x + b_n$ tel que $x^n = PQ + R$.
3. Le calcul des racines de P donne 3 et -2 . Ainsi on obtient

$$\begin{cases} 3^n &= 3a_n + b_n \\ (-2)^n &= -2a_n + b_n \end{cases}$$

La résolution du système donne

$$5a_n = 3^n + (-2)^n$$

donc

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{5}.$$

Ensuite,

$$b_n = 3^n - 3a_n = \frac{2 \times 3^n - 3(-2)^n}{5}.$$

4. On évalue l'égalité de la division euclidienne en A pour obtenir

$$A^n = Q(A)P(A) + a_n A + b_n I_3 = a_n A + b_n I_3$$

car $P(A) = 0_2$.

5. On obtient

$$A^n = \frac{1}{5} \left((3^n + (-2)^n)A + (2 \times 3^n - 3 \times (-2)^n)I_n \right).$$

Exercice 2

1. La fonction est continue sur $[0, 1]$ car son dénominateur ne s'annule pas. On peut donc définir son intégrale u_n .

2.

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln(3) - \ln(2).$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{1+2t} dt = \left[\frac{\ln(2t+1)}{2} \right]_0^1 = \frac{\ln(3)}{2}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^{n+1}} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n} \\ &= \int_0^1 \frac{1+t+t^n - 1-t-t^{n+1}}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)} dt \end{aligned}$$

qui est l'intégrale d'une fonction négative. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Donc (u_n) est décroissante.

4. On calcule $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$. Calculons alors

$$\begin{aligned} \ln(2) - u_n &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n} \\ &= \int_0^1 \frac{1+t+t^n - 1-t}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \end{aligned}$$

qui est l'intégrale d'une fonction positive. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \geq 0$.

5.

$$\begin{aligned} \ln(2) - u_n &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n} \\ &= \int_0^1 \frac{1+t+t^n - 1-t}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \\ &\leq \int_0^1 t^n dt \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

6. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \geq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par théorème d'encadrement des limites, $\ln(2) - u_n$ tend vers 0 donc u_n tend vers $\ln(2)$.

Exercice 3

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$.
2. Dans la première intégrale, on réalise le changement de variables affine $x = \frac{\pi}{2} - t$ qui donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x)} (-dx) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx. \end{aligned}$$

3. $\sin$ réalise une bijection C^1 strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$. On peut donc réaliser le changement de variable $t = \sin(s)$ (qui donne $dt = \cos(s)ds$). On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin(t)^2} + \sin(t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt. \end{aligned}$$

De plus En additionnant les deux intégrales de la question 2 on obtient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$. Comme elles sont égales, elles valent toutes les deux $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4 On considère une suite de polynômes (T_n) définie par

$$T_0 = 1, T_1 = 2x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2xT_{n+1} - T_n.$$

1. $T_2(x) = 2xT_1 - T_0 = 4x^2 - 1$.
2. a) On montre par récurrence double que le premier terme de T_n est $2^n x^n$ ce qui donne le degré de T_n et son coefficient dominant.

Initialisation double. La propriété est vraie :

- au rang 0 car $T_0 = 1 = 2^0 x^0$
- au rang 1 car $T_1 = 2x = 2^1 x^1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les termes dominants de T_n et T_{n+1} sont $2^n x^n$ et $2^{n+1} x^{n+1}$. On écrit $T_{n+1} = 2^{n+1} x^{n+1} + R$ où R est de degré strictement inférieur à $n+1$.

$$\begin{aligned} T_{n+2} &= 2xT_{n+1} - T_n \\ &= 2x(2^{n+1}x^{n+1} + R) - T_n \\ &= 2^{n+1}x^{n+1} + 2xR - T_n \end{aligned}$$

où $2xR - T_n$ est degré au maximum $n+1$ ce qui prouve le résultat.

La récurrence est donc achevée.

- b) Il suffit de montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.
Initialisation double. La propriété aux rangs 0 et 1 est vraie car 1 est pair et $2x$ est impair.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ et $T_{n+1} = (-1)^{n+1} T_{n+1}(x)$. Montrons que $T_{n+2}(-x) = (-1)^{n+2} T_{n+2}(x)$. On a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-x) &= 2(-x)T_{n+1}(-x) - T_n(-x) \\ &= 2x(-1)(-1)^{n+1}T_{n+1}(x) - (-1)^n T_n(x) \\ &= (-1)^{n+2} 2xT_{n+1}(x) - (-1)^{n+2} T_n(x) \\ &= (-1)^{n+2} (2xT_{n+1}(x) - T_n(x)) \\ &= (-1)^{n+2} T_{n+2}(x) \end{aligned}$$

d'où la propriété au rang $n+2$.

Par principe de récurrence, on a démontré la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. La suite $(T_n(1))$ vérifie la récurrence linéaire d'ordre 2

$$T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1).$$

La résolution par le polynôme caractéristique $x^2 - 2x + 1$ donne une seule racine double 1.

La suite est donc de la forme

$$T_n(1) = (a + bn)1^n = a + bn.$$

Les premiers termes donnent $1 = a$ (pour $n = 0$) et $a + b = 2$ (pour $n = 1$).

Donc $a = b = 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(1) = n + 1$.

4. a) On montre par récurrence double la propriété $P_n : \forall \theta \in]0, \pi[, T_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Initialisation

- Pour $n = 0$, on a bien pour tout θ , $\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = 1 = T_1(\cos(\theta))$.
- Pour $n = 1$, on $T_1(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta)$ et d'autre part

$$\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sin(\theta)} = 2 \cos(\theta) = T_1(\cos(\theta)).$$

Les propriétés sont donc vraies.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose les propriétés vraies au rang n et $n+1$. Montrons la propriété au rang $n+2$.

Pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta) \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{2\cos(\theta)\sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

- b) T_n admet au maximum n racines car il est de degré n . Il reste à montrer qu'il en admet n dans $] -1, 1[$. L'égalité de la question précédente, nous pousse à chercher des racines sous la forme $\cos(\theta)$ ($\theta \in]0, \pi[$) (qui est bien dans $] -1, 1[$). Or $\cos(\theta)$ est une racine si et seulement si $\sin((n+1)\theta) = 0$ ce qui donne $(n+1)\theta = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, donc $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$. Le choix de $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ donne exactement n racines différentes avec $\theta \in]0, \pi[$. Ceci achève la démonstration.
- c) Le théorème de factorisation des polynômes donne directement que $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(x - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

car les racines trouvées sont les $\cos \frac{k\pi}{n+1}$ et le coefficient dominant est 2^n .

- d) Avec $x = 1$, et en se souvenant que $T_n(1) = n+1$ on obtient

$$n+1 = 2^n \prod_{k=1}^n \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) = 2^n \prod_{k=1}^n \left(2 \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

à l'aide des formules de trigonométrie ($\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$).

Ainsi,

$$n+1 = 2^n \prod_{k=1}^n 2 \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}$$

donc

$$\frac{n+1}{4^n} = \left(\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n+1} \right)^2.$$

C'est un produit de facteurs positifs car pour ces réel (dans $]0, \pi[$) les sinus sont positifs, donc

$$\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}.$$

Exercice 5

1. P est une fonction dérivable et $P(0) = P(1)$ donc par le théorème de Rolle il existe $r_n \in]0, 1[$ tel que $P'(r_n) = 0$.
2. Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on applique de même le théorème de Rolle entre k et $k+1$ car $P(k) = P(k+1)$ donc il existe $r_{n,k} \in]k, k+1[$ tel que $P'(r_{n,k}) = 0$.
3. P' est un polynôme de degré n (car P est degré $n+1$). Il a donc au maximum n racines. On a démontré qu'il en a au moins n donc il en a exactement n .
4. r_n est unique car sinon le polynôme aurait $n+1$ racines.
5. P n'a pas de racine entre dans $]0, 1[$ donc $|P| > 0$ donc $\ln(|P|)$ est dérivable de dérivée $\frac{P'}{P}$. On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, f'(x) &= \frac{P'(x)}{P(x)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (x-j) \prod_{j=k+1}^n (x-j)}{\prod_{j=0}^n (x-j)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{x-k} \end{aligned}$$

6.

C. THÉORÈME DE WEIERSTRASS

C.1. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans cette partie, X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$E[(X + tY)^2] = E[X^2 + 2tXY + t^2Y^2] = E[X^2] + 2E[XY]t + t^2E[Y^2]$$

qui est un polynôme du second degré.

2. C'est l'espérance d'une variable aléatoire positive, donc la fonction est toujours positive. On en déduit que son discriminant est négatif. Or celui-ci vaut

$$\Delta = 4E[XY]^2 - 4E[X^2]E[Y^2]$$

ce qui donne $E[XY] \leq E[X^2]E[Y^2]$. On obtient l'inégalité voulue en appliquant la racine carrée.

C.2. Une variable aléatoire

1. S_n suit une loi binomiale $B(n, x)$. Son espérance est nx et sa variance est $nx(1-x)$.
2. $E[\frac{S_n}{n}] = E[S_n]/n = x$. $V[\frac{S_n}{n}] = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}$. Pour la loi : S_n/n est à valeur dans $\{\frac{k}{n}, k \in \{0, \dots, n\}\}$. On a

$$P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) = P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

3. C'est la formule de transfert.
4. C'est une combinaison linéaire de polynômes de degrés inférieur ou égal n donc P aussi appartient à $\mathbb{R}_n[x]$.
5. Pour tout x ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k} = f(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = f(x)(x + 1 - x) = f(x)$$

où on a utilisé le binôme de Newton. On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1] |f(x) - P_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \end{aligned}$$

6. Par inégalité triangulaire, on obtient

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Comme f est C^1 sur $[0, 1]$ on obtient, en posant $M = \max(|f'(x)|, x \in [0, 1])$, par l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n M \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

On reconnaît que la dernière expression vaut exactement $E[|\frac{S_n}{n} - x|]$ par la formule de transfert.

C.3. Fin de la démonstration.

1. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $X = |\frac{S_n}{n} - x|$ et $Y = 1$ (variable aléatoire certaine égale à 1) pour obtenir

$$E[|\frac{S_n}{n} - x|] \leq \sqrt{E\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^2\right]} \sqrt{E[Y^2]} = \sqrt{E\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^2\right]}.$$

De plus comme on a

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = V\left(\frac{S_n}{n} - x\right) = E\left[\left(\frac{S_n}{n} - x\right)^2\right] - E\left[\frac{S_n}{n} - x\right]^2$$

par la formule de Huygens Koenig. La deuxième espérance vaut 0 ce qui nous donne la dernière égalité.

2. En remplaçant la variance par son expression on obtient

$$\forall x \in [0, 1], |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{Mx(1-x)}{\sqrt{n}}$$

qui est majorée par $\frac{M}{4\sqrt{n}}$ sur $[0, 1]$.

3. On obtient

$$\sup_{[0,1]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{4\sqrt{n}}$$

qui tend vers zéro donc on a démontré le théorème.