DEVOIR SURVEILLÉ # 5

Date : 22 mars 2023

Barème indicatif : 8-8-7-7

A. EXERCICES

Exercice 1 Dans chacun des cas, donner un équivalent de u_n.

1. $u_n = \sin(\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{\ln(n)})$
2. $u_n = \frac{1-e^{\frac{-1}{n^2}}}{1-\cos(\frac{1}{n})}$.
3. $u_n = (1+\frac{4}{n\sqrt{n}})^5 - 1$.

Exercice 2 Après avoir prouvé sa convergence, calculer la somme (on se ramènera à une somme usuelle)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}.$$

Exercice 3 Montrer que l'ensemble des suites

$$\mathrm{E} = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ la série } \sum_{k=0}^{n} |u_k| \text{ converge} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 On note

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. D'après le cours, quelle est la limite de H_n ?
   On souhaite démontrer ce résultat.
2. Montrer que H_n est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}$.
4. Démontrer le résultat énoncé question 1).

Exercice 5 Déterminer une base de

$$\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=0. \end{cases} \right\}.$$

Quelle est la dimension de E ?

B. ÉTUDE DE DEUX SUITES COUPLÉES

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles définie par leurs premiers termes u_0 et v_0 et par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 2v_n \end{cases}.$$

On souhaite étudier les deux suites en même temps. Pour cela on pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2$ est non inversible si et seulement si λ est racine du polynôme $\mathrm{C}(x) = x^2 - x - 6$.
4. Pour chacune des racines λ de $\mathrm{C}(x)$, déterminer une base de

   $$\mathrm{E}_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}), (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

5. On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et donner son inverse.
6. Montrer que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ où D est une matrice diagonale à déterminer. (*Indication : on doit retrouver les racines de* $\mathrm{C}(x)$ *dans la matrice*).
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.
8. En déduire une formule pour A^n.
9. En déduire une formule pour v_n et u_n en fonction de u_0, v_0 et n.

C. MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$ et antisymétrique si ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$. On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On admet que A_n en est aussi un.
2. **Dans cette question,** $n = 3$**.** On note $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ un élément de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

   a) Montrer que

$$\mathrm{M} \in \mathrm{S}_3 \iff \begin{cases} b & = d \\ c & = g \\ f & = h \end{cases}.$$

   b) En déduire une base de S_3 et donner sa dimension. On note cette base $(\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_d)$.

   c) Montrer que

$$\mathrm{M} \in \mathrm{A}_3 \iff \begin{cases} b & = -d \\ c & = -g \\ f & = -h \\ a = e = i & = 0 \end{cases}.$$

   d) En déduire une base de A_3 et donner sa dimension. On note cette base $(\mathrm{N}_1, \dots, \mathrm{N}_{d'})$.

   e) Montrer que $(\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_d, \mathrm{N}_1, \dots \mathrm{N}_{d'})$ est une base de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
3. a) Montrer que

$$\mathrm{M} \in \mathrm{S}_n \iff \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } a_{i,j} = a_{j,i}.$$

   b) En déduire une base de S_n. Montrer que $\dim \mathrm{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On note cette base $(\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_d)$.

   c) De la même façon, déterminer une base de A_n et montrer que $\dim \mathrm{S}_n = \frac{n(n-1)}{2}$. On note cette base $(\mathrm{N}_1, \dots, \mathrm{N}_{d'})$.

   d) Montrer que $(\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_d, \mathrm{N}_1, \dots \mathrm{N}_{d'})$ est une base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

D. POLYNÔMES INTERPOLATEURS DE LAGRANGE

Soient $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ des réels **distincts** et $(b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ des réels. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ on définit la fonction L_k par

$$L_k(x)=\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-a_i}{a_k-a_i}.$$

1. **Dans cette question uniquement,** on pose $n=2$, $a_0=0$, $a_1=1$ et $a_2=2$. Déterminer L_0, L_1 et L_2.
2. Justifier pour tout $k\in\{0,\dots,n\}, L_k\in\mathbb{R}_n[x]$ et que $\deg L_k=n$.
3. Montrer que pour tout $(k,j)\in[\![0,n]\!]^2$,

$$L_k(a_j)=\begin{cases}1 & \text{si } k=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

4. Montrer que $(L_0,\dots L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$.
5. Montrer que $(L_0,\dots L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
6. Montrer que pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}_n[x]$,

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)L_k(x).$$

7. Soient $(b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_n[x]$ tel que pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, $P(a_i)=b_i$ et donner son expression.
8. Dans cette question, on fixe $r\in\mathbb{R}$ et on suppose que pour tout $i\in[\![0,n]\!]$

$$a_i=i \text{ et } b_i=r^i.$$

   Montrer que $P(x)=\sum_{i=0}^{n}r^iL_i(x)$. Calculer $P(n+1)$.