DEVOIR SURVEILLÉ # 5

Date : 22 mars 2023

Barème indicatif : 8-8-7-7

A. EXERCICES

Exercice 1 Réponses uniquement.

1. $u_n \sim \frac{1}{n\ln(n)}$
2. $u_n \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{2n^2}} = 2$.
3. $u_n \sim \frac{20}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 On calcule la somme partielle

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{3^n}{(n+1)!} &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{3^n}{n!}\\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{N+1} \frac{3^n}{n!} - 1\right).\end{aligned}$$

On reconnaît une série exponentielle. La somme partielle est donc convergente vers $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$.

Exercice 3

- E est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- E est non vide car la suite nulle appartient à E,
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $(u_n + \lambda v_n) \in$ E. Il s'agit de montrer que c'est une suite absolument convergente. Par inégalité triangulaire pour tout n on a

$$|u_n + \lambda v_n| \leqslant |u_n| + |\lambda||v_n|.$$

Ainsi le terme général $|u_n + \lambda v_n|$ est majoré par la somme de termes généraux de séries convergentes. Comme c'est une série à termes positifs, on conclut que c'est une série convergente. Ainsi $(u_n + \lambda v_n)$ est dans E. On conclut que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 On note

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. $\lim \mathrm{H}_n = +\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$ donc la suite est croissante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

4. (H_n) est croissante, donc soit elle converge soit elle diverge vers $+\infty$. Par l'absurde supposons qu'elle converge vers une limite ℓ. En passant à la limite dans l'inégalité obtenue question 3, on

$$\ell - \ell \geqslant \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde. Ainsi on est forcément dans le cas $\lim \mathrm{H}_n = +\infty$.

Exercice 5 On a un système de deux équations libres à 4 inconnues. En reformulant le système

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

on fixe y et z comme paramètre. Dès lors

$$\forall \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \mathrm{X} \in \mathrm{E} \iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ -y-z \end{pmatrix} \iff \mathrm{X} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Une base de E est donc

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

B. ÉTUDE DE DEUX SUITES COUPLÉES

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u_n + v_n \\ 4u_n + 2v_n \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1} \end{aligned}$$

2. On raisonne par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, $A^0X_0 = I_2X_0 = X_0$, donc la propriété est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $X_n = A^nX_0$. Alors $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Par principe de récurrence, c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La matrice $A - \lambda I_2$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Elle est donc non inversible si et seulement si $(-1-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$ ce qui est vrai si et seulement si $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$.
4. Pour chacune des racines λ de $C(x)$, déterminer une base de

$$E_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}), (A - \lambda I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

5. Le déterminant de la matrice vaut 5 donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Le calcul donne

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

7. On le prouve par récurrence :
Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = I_2$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. On calcule alors

$$A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

d'où la propriété au rang $n+1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

8. Comme $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^n & -(-2)^n \\ 4 \times 3^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^n + 4(-2)^n & 3^n - (-2)^n \\ 4(3)^n - 4(-2)^n & 4(3)^n + (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9. On trouve les formules en calculant le produit matriciel $A^n X_0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^n + 4(-2)^n & 3^n - (-2)^n \\ 4(3)^n - 4(-2)^n & 4(3)^n + (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\left(3^n(u_0 + v_0) + (-2)^n(4u_0 - v_0)\right) \\ \frac{1}{5}\left(4(3^n)(u_0 + v_0) + (-2)^n(v_0 - 4u_0)\right). \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque B.1 — Tout formule égale mais présentée différemment rapporte bien tous les points.

C. MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

1. On montre que S_n vérifie les propriétés d'un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
   - $S_n \subset M_n(\mathbb{R})$ par définition.
   - S_n est non vide car ${}^t 0_n = 0_n$ donc $0_n \in S_n$.
   - Soient $A, B \in S_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $A + \lambda B \in S_n$.

     $$ {}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda\, {}^tB = A + \lambda B $$

     donc $A + \lambda B \in S_n$.

   Ainsi S_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
2. a)

$$\begin{aligned} \forall M \in M_3(\mathbb{R}), M \in S_3 &\iff M = {}^tM \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} d = b \\ g = c \\ f = h \end{cases}. \end{aligned}$$

b) S_3 est un sous-espace de $M_3(\mathbb{R})$ défini par 3 équations. Il est donc de dimension 6. Soit $M \in S_3$, M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$S_n = \{aE_{1,1}+eE_{2,2}+iE_{3,3}+b(E_{1,2}+E_{2,1})+c(E_{1,3}+E_{3,1}+f(E_{2,3}+E_{3,2}), (a,e,i,b,c,f) \in \mathbb{R}^6\}.$$

Une base de S_n est donc

$$\left(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,3}+E_{3,2}\right).$$

Remarque C.1 — Ici, pas de problème à écrire explicitement les matrices. Ce sera juste plus difficile en dimension n.

c)

$$\begin{aligned}
\forall M \in M_3(\mathbb{R}), M \in A_3 &\iff -M = {}^tM \\
&\iff \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} a = -a \\ e = -e \\ i = -i \\ d = -b \\ g = -c \\ f = -h \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 0 \\ e = 0 \\ i = 0 \\ b = -d \\ g = -c \\ f = -h \end{cases}
\end{aligned}$$

d) Une base de A_3 est donnée par

$$\left(E_{1,2}-E_{2,1}, E_{1,3}-E_{3,1}, E_{2,3}-E_{3,2}\right).$$

e) La famille obtenue est de cardinal $6+3=9$ qui est la dimension de $M_3(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que la famille est libre ou génératrice pour prouver que c'est une base. Montrons qu'elle est génératrice.
Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. On sait qu'on peut décomposer $M = S + A$ avec $S \in S_3$ et $A \in A_3$.
Comme $(M_1 1, \dots M_6)$ est une base de
Remarque C.2 — Ici, montrer la liberté n'est pas difficile non plus.

3. a) M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$. Or pour tout (i,j), $({}^tM)_{i,j} = M_{j,i}$. Donc

$$\begin{aligned} M \in S_n &\iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}, M_{i,j} = M_{j,i} \\ &\iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}, i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = M_{j,i} \text{ car c'est automatiquement vrai si } i = j. \end{aligned}$$

b) Une base est donnée par

$$\left(\{E_{i,i}, i \in \{1,\dots,n\}\} \cup \{E_{i,j} + E_{j,i}, j > i\}\right).$$

Dans cette famille, le premier ensemble a n éléments et le deuxième $\frac{n(n-1)}{2}$. En tout il y en a $\frac{n(n+1)}{2}$ ce qui donne la dimension de S_n.

c) De la même façon, on obtient que qu'une base de A_n est

$$\left(E_{i,j} - E_{j,i}, , j > i\right).$$

On obtient $\dim S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

d) En tout, on obtient une famille de n^2 matrices. Il suffit alors de montrer qu'elle est génératrice. Comme toute matrice se décompose comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, on peut bien obtenir toute les matrices avec une combinaison linéaire de cette famille.

D. POLYNÔMES INTERPOLATEURS DE LAGRANGE

1. On obtient

$$L_0(x) = \frac{x-1}{-1}\frac{x-2}{-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}.$$

$$L_1(x) = \frac{x-0}{1-0}\frac{x-2}{1-2} = \frac{x(x-2)}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{x}{2-0}\frac{x-1}{2-1} = \frac{x(x-1)}{2}.$$

2. Pour tout k, L_k est le produit de n facteurs de degré 1 donc c'est un polynôme de degré n. On a immédiatement $L_k \in \mathbb{R}_n[x]$.
3. Si $k \neq j$, alors le facteur pour $j = k$ donne $a_j - a_j = 0$. Donc le produit vaut 0. Donc $L_k(a_j) = 0$.
   Calculons $L_k(a_k)$. On a :

$$L_k(a_k) = \prod_{i=1, i\neq k} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = 1.$$

4. Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} L_k(x)0.$$

   En évaluant en a_j on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(a_j) = 0$$

   donc comme tous les termes sont nuls sauf celui en $k = j$ on obtient $\lambda_j = 0$. C'est vrai quelque soit j donc les λ_j sont tous nuls.
   Ceci prouve que la famille est libre.
5. c'est une famille libre de cardinal $n+1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$ donc c'est une base.
6. Comme la famille précédente est une base, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe des scalaires λ_k tels que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(x).$$

On évalue l'égalité en a_j ce qui donne, comme tous les termes de la somme sont nuls sauf un qui vaut 1,

$$\mathrm{P}(a_j) = \lambda_j$$

ce qui conclut la démonstration.

7. Soit P un polynôme qui convient, alors par la question précédente,

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \mathrm{L}_k(x).$$

Donc si ce polynôme convient, alors il est unique. Réciproquement, il convient en évaluant l'égalité en les réels a_j.

8. Calcul fort pénible.