DM # 4

Devoir à rendre le lundi 27 novembre.

Exercice 1 Donner le terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Exercice 2 Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Exercice 3 Soif f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x + 2y + 3.$$

Montrer que f surjective mais pas injective.

Exercice 4 Soit (u_n) la suite définie par u_0 fixé et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = (1+t)(u_n - 12 \times m).$$

1. Donner l'expression du terme général de la suite.
   Ici u_0 modélise l'argent emprunté à la banque, t le taux d'intérêt annuel - par exemple $t = 0.05$ actuellement - , et u_n l'argent dû si on emprunte sur n années et qu'on rembourse m euros par mois.
2. Pour un crédit remboursé intégralement sur N années, donner une relation entre N, m et u_N.
3. Si un emprunteur peut rembourser $m = 1200$ euros par mois et qu'il emprunte sur $n = 25$ ans à $t = 0,05$. Quelle est la valeur de u_25 ? En déduire la valeur de u_0.

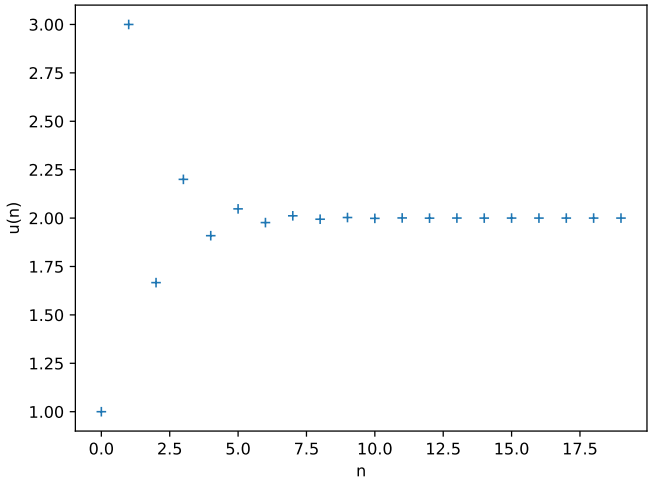
Exercice 5 Calculer les limites des expressions suivantes.

1. $\frac{n^3-1}{-n^3+12n^2+10^7n+10^9}$,
2. $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$,

3. $e^n - n^4$,
4. $\frac{4^2+(-2)^n}{4^n-(-2)^n}$,
5. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

Exercice 6 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

1. Écrire un programme Python qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur u_n.
2. L'affichage des termes de la suite renvoie ce graphique. Quelles conjectures peut-on faire ?



3. Faire l'étude de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1 + \frac{2}{x}$.
4. Montrer que (u_n) est bien définie et que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,3].$$

5. Dresser le tableau de signe de la fonction

   $$g : x \in [1,3] \mapsto f(f(x)) - x.$$

6. Montrer que la suite extraite (u_{2n}) est croissante puis qu'elle converge.
7. Montrer que la suite (u_{2n+1}) converge.
8. Montrer que nécessairement, les limites de ces suites extraites sont solution de

   $$f(f(\ell)) = \ell.$$

9. En déduire que (u_n) converge. Donner sa limite.