DM # 5

Exercice 1 On considère la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\big(\ln(x)\big)^2}\big(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\big)$$

2. a) Justifier : $\forall t \in]0,1[,\ t\ln(t) < 0$
   b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

3. a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
   b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$. (On calculera $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.)

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
   En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on note u_n.

7. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

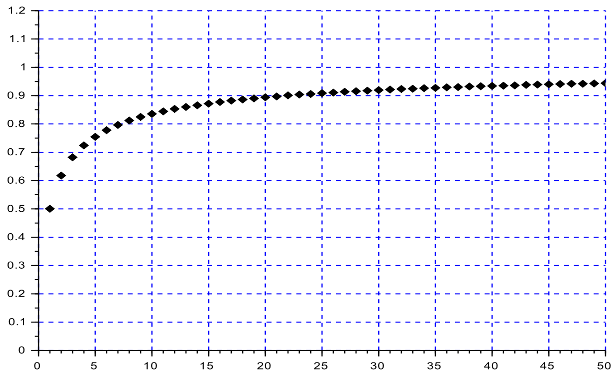
8. Déterminer u_1 et u_2.

9. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbf{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n):
    a = 0
    b = 1
    while ____________:
        c = (a + b) / 2
        if (c**n + c - 1) > 0 :
            ___________

        else:
            ___________
    return(_____)
```

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. a) Montrer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $f(u_n) = n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 2 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une valeur propre de M s'il existe $v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non-nul tel que :

$$Mv = \lambda v$$

Le vecteur v est alors appelé un vecteur propre de M associé à λ.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et donner la valeur propre λ_1 associée.
   b) Mettre l'équation matricielle $Av = v$ d'inconnue $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sous forme d'un système d'équations et simplifier celui-ci au maximum. En déduire un autre vecteur propre v_2 de A ainsi que la valeur propre λ_2 associée.

   Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P = c_d x^d + \ldots + c_1 x + c_0$ un polynôme à coefficients réels. On définit l'image de M par P :

$$P(M) = c_d M^d + \ldots + c_1 M + c_0 I_n$$

   Si $P(M) = 0_n$ on dit que P est un polynôme annulateur de M.
2. a) Vérifier que $P = x^2 - 3x + 2$ est un polynôme annulateur de A.
   b) Verifier que $Q = x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On veut démontrer le théorème suivant :

   Théorème 1
   Si P est un polynôme annulateur de M, alors toute valeur propre de M est également une racine de P.

   Soient $M \in \mathcal{M}n(\mathbb{R})$, P un polynôme annulateur de M, λ une valeur propre de M et v un vecteur propre associé.
   a) Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$M^k v = \lambda^k v$$

   b) En déduire que quelque soit le polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$:

$$P(M)v = P(\lambda)v$$

   c) Conclure.
4. Vérifier ce théorème avec la matrice A définie à la question 2.(a).
5. Démontrer que la matrice B définie à la question 2.(b) n'a pas de valeur propre.
6. a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. On rappelle que

$$\mathrm{Tr}(A) = a + d \text{ et que } \det(A) = ad - bc.$$

   Montrer que $P_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$ est un polynôme annulateur de A.

b) Montrer qu'une matrice

$$M \in M_2(\mathbf{R})$$

est inversible si et seulement pour tout $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul, MX est non nul.

c) Montrer que $\lambda \in \mathbf{R}$ est une valeur propre de A si est seulement si λ est racine de $P_A(x)$.

d) Quel est nombre de valeurs propres possibles pour A ? (On montrera que cela dépend du signe de $\Delta = (\mathrm{Tr}(A))^2 - 4\det(A)$).

e) Dans cette question on suppose $\Delta > 0$. Soit P une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres (associés à des valeurs propres distinctes) de A. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale dont on déterminera les coefficients.