

Probabilités et variables aléatoires sur un ensemble fini.

Exercice 1

On lance une pièce n fois consécutivement une pièce non équilibrée (qui a une probabilité p de tomber sur Pile). On souhaite calculer la probabilité p_n d'obtenir un nombre pair de pile.

1. Calculer p_1, p_2, p_3 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = (1 - p_n)p + p_n(1 - p).$$

3. En déduire une formule explicite pour la suite (p_n) .
4. La suite p_n converge-t-elle?

Exercice 2 Dans une chambre on a N tiroirs.

Avec une probabilité p , une paire de chaussette a été placée dans un des tiroirs de façon équiprobable. Sinon, on laisse les tiroirs vides.

On a ouvert $N - 1$ tiroirs sans trouver de chaussettes. Quelle est alors la probabilité qu'il y ait la paire de chaussette dans le dernier tiroir?

Exercice 3 Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs $p_1, \dots, p_n$.

1. On pose $U = \max(X_1, X_2)$ et $V = \min(X_1, X_2)$. Justifier que U et V sont des variables aléatoires de Bernoulli.
2. Déterminer les lois de U et V .
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 4 Un étudiant passe un QCM à N questions. Pour chaque question, il a une probabilité p de connaître la réponse et chaque question est indépendante. S'il ne sait pas il répond au hasard parmi les 4 réponses. On note X la variable aléatoire qui compte les points obtenus.

1. Quel est la probabilité de répondre juste à la première question? Pourquoi cette probabilité ne dépend pas de la question choisie?

2. Expliquer pourquoi X doit suivre une loi Binomiale.
3. Déterminer les paramètres de la loi.
4. Calculer $E(X)$.
5. p représentant la fraction des questions révisées par l'étudiant. Quelle doit être sa valeur pour obtenir un espérance de 10 points. On prendra $N = 20$.

Exercice 5 Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$. On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y. On revient au cas général.
2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.
4. On rappelle les commandes PYTHON suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes une fois la bibliothèque NUMPY.RANDOM importée :
 - a) RD.RANDINT(A,B) renvoie un entier aléatoire uniformément choisi entre A (inclus) et B (exclus).
 - b) RD.BINOMIAL(N,P) simule une loi binomiale de paramètres N et P.
 Compléter le script PYTHON suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
import numpy.random as rd
def simule(p,n):
    X = _____
    Y = _____
    return(_____)
```

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[0, n]$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

- b) Écrire, pour tout i de $[1, n]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.
6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$$
- b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

- c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$
7. a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

- b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

- c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$
- d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$