DEVOIR MAISON # 7

Intégration

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes et elles sont non nulles à partir d'un certain rang et si

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note alors $u_n \sim v_n$.

1. INTÉGRALES DE WALLIS

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx.$$

1. A l'aide d'un changement de variables, montrer que

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx.$$

2. Calculer W_0 et W_1.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

   (On réalisera une intégration par parties).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

5. En déduire que

$$W_{n+1} \sim W_n \text{ puis que } W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

7. Trouver une formule analogue pour W_{2n+1}.

2. UN PRODUIT DE CONVOLUTION

Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) \text{ si } x \in [0, \pi] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Calculer la primitive

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f(t)dt.$$

   On distinguera les cas :
   - $x \leqslant 0$,
   - $x \in [0, \pi]$,
   - $x > \pi$.
3. A l'aide d'un changement de variable affine, calculer pour tout $x \in \mathbf{R}$.

$$\int_0^{\pi} f(x-t)dt.$$