1 Probabilités, matrices.

On considère une particule astreinte à se déplacer sur la droite réelle en effectuant une marche aléatoire de pas $+h$ ou $-h$, avec $h > 0$ tous les Δt instants. Cette particule peut faire indifféremment un saut à gauche ou à droite avec une même probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose qu'à l'instant initial la particule est en $= 0$. On note X_k la position de la particule au temps $k\Delta t$ c'est-à-dire après k sauts.

1. Donner l'ensemble des valeurs pouvant être prises par X_3, ainsi que sa loi de probabilité. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X_k) = 0$.
3. Soit $Y =_k$ la variable qui compte le nombre de saut à droite de la particule au temps $k\Delta t$. Quelle est la loi de Y_k ? Justifier.
4. Exprimer X_k en fonction de Y_k

   Attention ! S'il vous venait à l'esprit de noter quoique ce soit $\overline{Y_k}$, rappelez-vous que l'événement contraire d'une variable aléatoire, **ça n'a pas de sens**. Allez boire un café, un chocolat chaud ou la boisson de votre choix et demandez-vous : "ce que je voulais appeler $\overline{Y_k}$, comment l'exprimer en fonction de k et Y_k".
5. Déterminer $X_k(\Omega)$ ainsi que la loi de X_k.
6. Déterminer la variance de X_k.
7. Écrire un programme Python qui prend en entrée un entier n et simule la variable aléatoire X_n.

On suppose maintenant que cette particule est enfermée dans une boite de n cases de largeur h numérotées de 1 à n. Quand la particule est à gauche, sur la case 1 elle a une probabilité $\frac{1}{2}$ de rester sur place et une probabilité $\frac{1}{2}$ de rebondir à droite et de se retrouver dans la case 2. De manière symétrique, si elle est dans la dernière case (n) elle a une probabilité $\frac{1}{2}$ de rester dans la case n et une probabilité $\frac{1}{2}$ de se retrouver dans la case $n-1$. Dans les autres cas (quand elle est située entre les cases 2 et $n-1$), la particule se comporte comme dans la sous-partie précédente. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$. On dira qu'un vecteur $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ est le vecteur de probabilité de X si pour tout $i \in [\![1, n]\!], \mathrm{P}(X = i) = p_i$. Cela nécessite en particulier que pour tout $i \in [\![1, n]\!], p_i \geq 0$ et que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & & \dots & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \dots & & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

7. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\vec{p}_{k+1} = M\vec{p}_k$.

   Remarque : Cette question n'est pas simple, penser à la formule des probabilités totales.
8. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\vec{p_k} = M^k \vec{p_0}.$$

On se place, jusqu'à la fin du sujet, dans le cas $n = 3$.

9. Que vaut alors la matrice M ?
10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $M - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement $\lambda = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, ou $\lambda = \frac{1}{2}$.
11. Trouver des vecteurs v_1, v_2, v_3 dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que
$$Mv_1 = v_1, \quad Mv_2 = \frac{1}{2}v_2, \quad Mv_3 = -\frac{1}{2}v_3.$$

12. Soit Q la matrice telle que les vecteurs v_1, v_2, v_3 trouvés sont les colonnes de Q. Montrer que

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On note D la matrice obtenue.

13. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = QD^kQ^{-1}$.
14. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} D^k$.
15. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} M^k$ puis $\lim_{k\to+\infty} \vec{p}_k$. Donner une interprétation.
16. Écrire un programme Python qui prend en entrée le nombre de cases k et un entier n et simule n étapes du problème étudié.

2 Sous-espaces vectoriels

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tM = M$ et antisymétrique si ${}^tM = -M$. On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que S_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. On admet que A_n en est aussi un.
2. **Dans cette question,** $n = 3$. On note $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ un élément de $M_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que
   $$M \in S_3 \iff \begin{cases} b &= d \\ c &= g \\ f &= h \end{cases}.$$
   (b) En déduire une base de S_3 et donner sa dimension. On note cette base $(M_1, \ldots, M_d)$.
   (c) Montrer que
   $$M \in A_3 \iff \begin{cases} b &= -d \\ c &= -g \\ f &= -h \\ a = e = i &= 0 \end{cases}.$$
   (d) En déduire une base de A_3 et donner sa dimension. On note cette base $(N_1, \ldots, N_{d'})$.
   (e) Montrer que $(M_1, \ldots, M_d, N_1, \ldots N_{d'})$ est une base de $M_3(\mathbb{R})$.
3. (a) Montrer que
   $$M \in S_n \iff \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } a_{i,j} = a_{j,i}.$$
   (b) En déduire une base de S_n. Montrer que $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On note cette base $(M_1, \ldots, M_d)$.
   (c) De la même façon, déterminer une base de A_n et montrer que $\dim S_n = \frac{n(n-1)}{2}$. On note cette base $(N_1, \ldots, N_{d'})$.
   (d) Montrer que $(M_1, \ldots, M_d, N_1, \ldots N_{d'})$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$.