DEVOIR MAISON # 9

Exercice 1 Dans chacun des cas, donner un équivalent de u_n et déterminer si la série de terme général u_n converge.

1. $u_n = \sin(\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$
2. $u_n = \frac{1-e^{\frac{-1}{n^2}}}{1-\cos(\frac{1}{n})}$.
3. $u_n = (1+\frac{4}{n\sqrt{n}})^5 - 1$.

Exercice 2 Après avoir prouvé sa convergence, calculer la somme (on se ramènera à une somme usuelle)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}.$$

Exercice 3 Montrer que l'ensemble des suites

$$\mathrm{E} = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{la série } \sum_{k=0}^{n} |u_k| \text{ converge} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Justifier que $\lim \mathrm{S}_n = +\infty$.

   Dans la suite de l'exercice, on souhaite déterminer un équivalent de S_n.

2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{S}_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant \mathrm{S}_n.$$

4. En déduire que $\mathrm{S}_n \sim \ln(n+1)$.
5. Prouver que $\mathrm{S}_n \sim \ln(n)$.

Exercice 5 Soient $\alpha, \beta > 0$. A quelle condition la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(1+\frac{1}{n^\beta})^\alpha}{n^\alpha}$$

est-elle convergente ?