

DEVOIR SURVEILLÉ # 1

Date : 21 septembre 2022

Durée : 4h

Quelques consignes :

- Accordez un grand soin à la présentation et à la rédaction des résultats. Cela, comme aux concours, sera largement pris en compte dans l'évaluation de la copie. Utilisez le brouillon !
- Traitez les questions dans l'ordre. Encadrez les résultats. Laissez une marge suffisante pour les points et commentaires. Revenir sur une nouvelle page au début de chaque exercice. Numérotez les pages (en indiquant bien le nombre total de pages).
- Il est tout à fait possible de sauter une question en l'indiquant clairement sur la copie, par exemple en laissant un espace vide après avoir indiqué le numéro de la question. C'est la bonne chose à faire quand on bloque sur une question, et il est vain d'essayer d'arnaquer le correcteur : cela serait sévèrement sanctionné.
- Dernier conseil : les devoirs en prépa et les sujets de concours sont longs. Avancez à votre rythme en utilisant tout le temps qui vous est proposé.
- Les calculatrices et documents sont interdits.
- Barème indicatif : exercices 18 points, problèmes 12 points.

Exercice 1 Mettre sous la forme $x^n y^m$ (avec n et m entiers) les expressions suivantes.

1.

$$\left(\frac{xy}{x^2}\right)^3.$$

2.

$$(x^2 y)^{-2} (y^3)^2.$$

Exercice 2 Mettre sous forme canonique le polynôme

$$P(x) = -x^2 - x + 6.$$

Déterminer ses racines et dresser le tableau de signe de P .

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. Il existe un entier dont l'image par f est 0.
2. Pour tout réel x , il existe un réel dont l'image par f est x .
3. Les fonctions f et g prennent la même valeur exactement une fois sur $\mathbf{R}$.
4. f admet un maximum sur $\mathbf{R}$. (Indication : c'est à dire qu'il existe une valeur prise par f supérieure ou égale à toutes les autres).

Exercice 4

1. Écrire la négation des affirmations suivantes.
 - a) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, xy \neq 0$.
 - b) $\exists x \in]0, +\infty[, \forall y \in]0, +\infty[, e^y = \ln(x)$
 - c) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N}, x = y + 1$.
2. Parmi les propositions précédentes, lesquelles sont vraies? On attend une démonstration.

Exercice 5

1. Soit (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0 = 2, u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1.$$

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = \frac{\pi}{2}$, et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} u_n u_{n+1},$$

puis montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n+1) u_n u_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6 Soit $x \in \mathbf{R}$. Démontrer l'implication

$$x^2 \text{ n'est pas un entier} \Rightarrow x \text{ n'est pas un entier.}$$

Exercice 7 Soit $P(x) = x^3 - 11x^2 - 14x + 24$.

1. Donner une solution évidente de l'équation $P(x) = 0$.
2. Trouver des réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

3. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

PROBLÈME 1

Dans ce problème, on s'intéresse aux suites définies $u_0 = 0, u_1 = 1$ et une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

où a et b sont **des réels fixés**.

1. Soit (u_n) telle suite. Dans cette question on suppose qu'elle est géométrique de raison q .
 - a) Montrer que $q^2 = aq + b$.
 - b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que l'équation précédente admette deux solutions.

Dans la suite du problème, on se suppose que cette condition est vérifiée. Soient q_1 et q_2 les deux solutions de l'équation $q^2 = aq + b$.

2. Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = Cq_1^n + Dq_2^n$$

où C et D sont des réels fixés. Déterminer C et D pour avoir $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n.$$

(Indication : ce n'est pas une démonstration par récurrence).

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = v_n$.
5. **Application.** Soit F_n la suite définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Donner une expression explicite pour la suite (F_n) .

PROBLÈME 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
4. On cherche à démontrer que

$$\forall y \in \mathbf{R}, \exists ! x \in \mathbf{R}, f(x) = y$$

et à trouver une expression explicite pour x en fonction de y .

- a) Soit $y \in \mathbf{R}$. Montrer que nécessairement

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

- b) En déduire deux valeurs possibles pour e^x .
c) Prouver que $y - \sqrt{y^2 + 1}$ est négatif.
d) En déduire que

$$x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right).$$

- e) Conclure.