DEVOIR SURVEILLÉ # 2

Date : 9 novembre 2023

Durée : 4h

Barème indicatif :

- Calcul de sommes : 5 pts
- Exercices : 16 pts $(2+2+2+3+2+3+2)$
- Problème : 9 pts

La rédaction et la présentation de la copie seront largement pris en compte dans la notation.

1. CALCUL DE SOMMES

Calculer les sommes suivantes.

1.
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^n 3^{2n}.$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2+k.$$

3.
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

   On pourra chercher des réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+3}.$$

4.
$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

5.
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\ln(x^{ij})$$

   où $x>0$ est un réel fixé.

2. EXERCICES

Exercice 1 On définit une fonction f par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que f réalise une bijection de son ensemble de définition vers un $\mathbf{R}$. On déterminera l'expression de la bijection réciproque.

Exercice 2 Résoudre l'équation suivante dans $\mathbf{R}$:

$$\tan(2x-2) = \sqrt{3}.$$

Exercice 3 Soit A l'ensemble défini par

$$\mathrm{A} = \left\{(-1)^n + \frac{1}{1+n}, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

Montrer que A est borné. Déterminer $\inf \mathrm{A}$ et $\sup \mathrm{A}$.

Exercice 4 Soit $x \in \mathbf{R}$ un réel qui n'est pas de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

1. Montrer que pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\sin\left(jx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(jx - \frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(jx).$$

2. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{j=0}^{n} \cos(jx).$$

Exercice 5 Soit $x \in \mathbf{R}$. On souhaite calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le produit

$$\mathrm{P}_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x).$$

1. Calculer $\sin(x)\mathrm{P}_0(x)$, $\sin(x)\mathrm{P}_1(x)$, $\sin(x)\mathrm{P}_2(x)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sin(x)\mathrm{P}_n(x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}.$$

3. Conclure.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{Z}$ par

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est à valeur dans $\mathbf{N}$.
2. Montrer que f est injective.
3. Montrer que $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ est bijective.

Exercice 7

On rappelle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*, j \in \mathbf{N}^*$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}.$$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

3. PROBLÈME

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ (on prend $a \neq 1$). On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Si (u_n) converge, montrer que $\ell = \sqrt{a}$. *On pourra utiliser, sans démonstration supplémentaire, que si (u_n) converge vers ℓ alors (u_{n+1}) aussi.*
3. Réaliser l'étude de la fonction

$$f : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

   On prendra soin de réaliser un tableau de variations qui pourra être très utile pour la suite.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > \sqrt{a}$.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1
6. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{u_n}.$$

8. A partir de cette question, on suppose que $a > 1$ que la valeur u_0 vérifie. $|u_0 - \sqrt{a}| \leqslant 1$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{2^n - 1}}.$$

9. Soit $\varepsilon > 0$. Pour obtenir $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \varepsilon$, quelle valeur de n peut-on choisir ?