

DEVOIR SURVEILLÉ # 3

Suites, fonction, matrices

Date : 20 décembre 2023

Durée : 4h

Barème indicatif : 6-6-7-7

La rédaction et la présentation de la copie seront largement pris en compte dans la notation.

1. EXERCICES EN VRAC - MAIS AVEC DES POINTS QUAND MÊME !

Exercice 1 Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre $m \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} 3x + y - z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= m \\ x + y + z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - x^{10}}{e^n - x^{20}}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x) + e^x}{e^x + 1}, \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + 2}{x^7 + x^6}.$$

Exercice 3 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2. Montrer que f réalise une bijection entre D_f et un intervalle à déterminer.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n . Justifier que $x_n \in]0, 1[$.
4. Montrer que (x_n) est une suite décroissante.
5. Montrer que x_n converge vers une limite ℓ vérifiant

$$\ell + \ln(\ell) = 0.$$

2. UNE SUITE DE MATRICES

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On définit la matrice P suivante

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T à déterminer.

2. a) Calculer A^2 et A^3 , puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A.$$

vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

b) Justifier que $a_1 = 0, b_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 0$.

c) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n . On utilisera les valeurs initiales de a_1 et a_2 .

d) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n .

4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. MATRICES ET COUPLE DE SUITES RÉCURRENTES

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 8A$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_n .
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D à déterminer.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Donner l'expression explicite de A^n .
7. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= -4u_n + v_n \end{cases}$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

8. Donner une expression explicite pour la suite (u_n) .

4. ÉTUDE DE SUITE ET DE FONCTION

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).
b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.
2. *Informatique.*
a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
    u=1
    n=0
    while ..... :
        u=np.exp(-u)/u
        n=....
    return n
```

b) On considère maintenant la fonction Python :

```
def fonc_2(a):
    u=1
    n=0
    while u>=a :
        u=np.exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?

Commenter ce résultat en une ligne.

- c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .
3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$.
- Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1]$.
 - En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α .
 - Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. *On rappelle que $e \approx 2,7$.*
4.
 - Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
 - En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
- Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
 - Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
 - Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question ??.
 - En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée? Admet-elle une limite?