DEVOIR SURVEILLÉ # 5

Barème indicatif : 3, 3, 4, 8, 8.

EXERCICE 1 - PYTHON

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2}$. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie la liste des n premiers termes de la suite.
2. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un tableau et renvoie la somme de ses composantes.
3. Écrire un fonction qui simule le lancer d'un dé équilibré à six faces jusqu'à l'obtention d'un 6. Le programme renvoie le nombre de lancers réalisés.

EXERCICE 2 - ESPACES VECTORIELS

1. Montrer que

$$\mathrm{F} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z-t=0 \end{cases} \right\}$$

   est un espace vectoriel dont on déterminera une base.
2. Montrer que $(x^3+x^2+x+1, x^2+1, x^2-1, 2x)$ est une base de $\mathbf{R}_3[x]$.

EXERCICE 3 - INTÉGRALES

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par

$$\mathrm{I}_n = \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} dx.$$

1. Calculer I_0.
2. En réalisant une intégration par parties, démontrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{I}_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)\mathrm{I}_n.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathrm{I}_n = n!\left(1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).$$

4. En réalisant le changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt.$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   On pourra utiliser, en le justifiant, que pour tout $t \in [0,1]$, $t^n e^{-t} \leqslant t^n$.
6. En déduire la limite de I_n, puis celle de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

PROBLÈME 1 - PROBABILITÉS

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, numérotés $1, 2, 3$ et 4 , d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet 1 .
- Si à l'instant $n (n \geqslant 0)$ la puce se trouve sur le sommet 1 , elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant $n (n \geqslant 1)$ la puce se trouve sur le sommet 2 , elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n (n \geqslant 1)$ la puce se trouve sur le sommet 3 , elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n (n \geqslant 1)$ la puce se trouve sur le sommet 4 , elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par la puce à l'instant n et on a donc $\mathrm{P}([\mathrm{X}_0 = 1]) = 1$.

1. a) Déterminer la loi de X_1.
   b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. a) En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathrm{X}_n = k]_{k \in \{1,2,3,4\}})$, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , on a :

$$\mathrm{P}([\mathrm{X}_{n+1} = 1]) = \frac{2}{3}\mathrm{P}([\mathrm{X}_n = 1]) + \frac{1}{2}\mathrm{P}([\mathrm{X}_n = 2]).$$

   b) Exprimer de même, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$\mathrm{P}([\mathrm{X}_{n+1} = 2]), \mathrm{P}([\mathrm{X}_{n+1} = 3]), \mathrm{P}([\mathrm{X}_{n+1} = 4])$$

   en fonction de

$$\mathrm{P}([\mathrm{X}_n = 1]), \mathrm{P}([\mathrm{X}_n = 2]), \mathrm{P}([\mathrm{X}_n = 3]) \text{ et } \mathrm{P}([\mathrm{X}_n = 4]).$$

c) Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.

d) Que vaut pour tout n de $\mathbb{N}$, la somme : $P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) + P([X_n = 3]) + P([X_n = 4])$?

4. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on note U_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par :
$$U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \end{pmatrix}.$$
De plus, on pose : $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En utilisant les relations trouvées précédemment, établir pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $U_{n+1} = AU_n + B$.

5. a) Déterminer une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant : $L = AL + B$.

   b) Établir pour tout entier naturel n, la relation suivante : $U_n = A^n (U_0 - L) + L$.

6. On pose $C = 6A$. Soit R, D et Q les matrices d'ordre 3 définies par :
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Calculer RQ. En déduire que R est inversible et donner R^{-1}, où R^{-1} désigne la matrice inverse de la matrice R.

   b) Calculer $CR - RD$.

   c) En déduire pour tout entier naturel n, la relation suivante : $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$.

   d) On admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$, est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer U et préciser $\lim_{n\to+\infty} P([X_n = 4])$.

PROBLÈME 2 - COMMUTANT D'UNE MATRICE DIAGONALE

Définition 1 | Commutant d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, le commutant de la matrice A est l'ensemble
$$C_A = \{M \in M_n(\mathbf{R}), AM = MA\}.$$

1. **[Commutant d'une matrice de taille 3]** Dans cette question, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que C_D est un espace vectoriel.

b) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, montrer que

$$\mathrm{M} \in \mathrm{C_D} \iff \mathrm{M} \text{ est diagonale.}$$

c) En déduire une base de $\mathrm{C_D}$ et sa dimension.
d) Soit P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \mathrm{P}(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Montrer que $\mathrm{P(D)} = 0_3$. En déduire que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \mathrm{D}^2, \mathrm{D}^3)$ est liée.
e) Soit $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \mathrm{D}^2)$. Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \mathrm{D}^2)$ est libre. En déduire la dimension de G.
f) Montrer que $\mathrm{G} \subset \mathrm{C_D}$ puis que $\mathrm{G} = \mathrm{C_D}$. (Pour démontrer l'égalité, pensez à la dimension!)

2. **[Commutant d'une matrice diagonale à coefficients distincts]** Dans cette partie $\mathrm{D} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice diagonale fixée. On note $(d_1, \dots, d_n)$ ses coefficients diagonaux et on suppose qu'ils sont distincts deux à deux et qu'ils sont non nuls. On rappelle que

$$\mathrm{C_D} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}), \mathrm{DM} = \mathrm{MD}\}.$$

a) Montrer que $\mathrm{C_D}$ est un espace vectoriel.
b) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, montrer que

$$\mathrm{M} \in \mathrm{C_D} \iff \forall (i,j) \in [\![1, n]\!], d_i \mathrm{M}_{i,j} = d_j \mathrm{M}_{i,j}.$$

c) En déduire que $\mathrm{C_D}$ est l'ensemble des matrices diagonales. Donner une base de $\mathrm{C_D}$ ainsi que sa dimension.
d) Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^n)$ est liée.
e) En déduire que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\mathrm{D}^k, k \in \mathbf{N})$.
f) Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^{n-1})$ est libre.
Indication : on montrera que si $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mathrm{D}^i = 0_n$ alors le polynôme $\mathrm{P}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x^i$ admet $d_1, \dots, d_n$ comme racines.
g) En déduire que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^{n-1})$ est une base de G.
h) Montrer que $\mathrm{G} \subset \mathrm{C_D}$, puis que $\mathrm{G} = \mathrm{C_D}$.

3. **[Commutant d'une matrice diagonalisable]** Dans cette question, $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice telle qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ inversible telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ est une matrice diagonale à coefficients distincts non nuls.
a) Montrer que $\mathrm{C_A} = \{\mathrm{PNP}^{-1}, \mathrm{N} \in \mathrm{C_D}\}$.
b) En déduire que $\mathrm{C_A} = \{\mathrm{Q(M)}, \mathrm{Q} \in \mathbf{R}[x]\}$.
c) En déduire la dimension de $\mathrm{C_A}$.
d) Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \dots \mathrm{A}^n)$ est liée et en déduire qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbf{R}_n[x]$, $\mathrm{Q(A)} = 0_n$.