

INF 10 - Systèmes linéaires.

1. ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS

On considère un système linéaire mis sous la forme

$$AX = B$$

où $A \in M_n(\mathbf{R})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbf{R})$. L'objectif est de :

- Déterminer si A est inversible,
- Résoudre le système $AX = B$: trouver X .

On a alors plusieurs choix : on peut soit inverser la matrice A (si elle est inversible), puis calculer $X = A^{-1}B$, soit résoudre uniquement l'équation $AX = B$. Ces deux méthodes ont leurs avantages et leurs inconvénients : inverser une fois A permet de résoudre le système rapidement pour toute valeur de X . Au contraire, si on doit résoudre moins de " n " systèmes, il vaut mieux résoudre uniquement l'équation.

Exercice 1 Coder une fonction pivot qui prend en entrée une matrice carrée et renvoie la matrice inverse de la matrice.

2. LES MÉTHODES DE LA BIBLIOTHÈQUE NUMPY.LINALG

Le pivot de Gauss est déjà implémenté dans les modules de Python. On utilise le module `numpy.linalg`. On l'importe sous l'alias `al` grâce à la commande `import numpy.linalg as al`.

Les méthodes à connaître sont :

- `al.inv`, qui inverse une matrice carrée si c'est possible,
- `al.matrix_power`, qui prend en entrée une matrice et un nombre : `al.matrix_power(M,k)` renvoie la matrice M^k ,
- `al.solve` prend en entrée une matrice A et un vecteur b et renvoie l'unique solution si elle existe de $AX = b$. On tapera `al.solve(A,b)`.

Attention

La méthode `al.solve` ne fonctionne que pour des matrices **carrées et inversibles**.

Exercice 2 Retour sur les matrices.

Écrire une fonction qui prend en entrée un entier n et crée la matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ définie par

$$(M)_{i,j} = \begin{cases} i-1 \\ j-i \end{cases}$$

si $i \geq j$ et 0 sinon.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

A l'aide des commandes du module `numpy.linalg`, résoudre les systèmes $AX = B$ pour les valeurs de B :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Inverser la matrice A et retrouver les mêmes résultats dans les méthodes de `al`.

Exercice 4 Avec les méthodes de votre choix, résoudre les systèmes suivante :

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + 3z = 5 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 5 Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Les inverser si possible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire une fonction qui calcule u_n à l'aide du calcul des puissances de A .
4. Essayer la méthode avec a et b tels qu'on ne connaît pas d'autres méthodes de résolution (pourquoi la condition est-elle $a^2 + 4b < 0$?)

Exercice 7 Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par leurs premiers termes a_0 et b_0 et les relations de récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n - b_n \\ b_{n+1} &= -a_n + 2b_n \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire un programme qui prend entrée les conditions initiales et n et renvoie a_n et b_n . Le tester sur des exemples.
4. Si $a_{100} = 900$ et $b_{100} = -60$, peut-on trouver a_0 et b_0 ?