

TD 1 : Rappels de terminale, calculs

Dans ce TD, nous allons faire du calcul. Les méthodes doivent être maîtrisées pour débiter l'année de CPGE avec sérénité.

Pour approfondir, vous pouvez consulter le cahier de calcul réalisé par des collègues de CPGE. Les rappels de cette feuille de TD correspondent aux fiches 1 à 6. Le cahier est disponible à l'adresse suivante :

https://colasbd.github.io/cdc/cahier_de_calcul_enonces_v11.pdf.

1. CALCULS

Exercice 1 Simplifier les calculs suivants

1. $5 + 2\frac{7}{3}$
2. $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{25}{12}}$
3. $\frac{12}{x-1} + \frac{3x-9}{x^2-1} - \frac{x^2}{x^3-x}$
4. $(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}) \times (\frac{12}{7} + \frac{11}{2})$.

Exercice 2 Transformer chacune des expressions suivantes en expressions égales avec le moins de racines carrées possibles (notamment, on ne veut **aucune** racine carrée au dénominateur).

1. $A = \frac{5}{2-\sqrt{7}}$,
2. $B = \sqrt{64} + \sqrt{128}$,
3. $C = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$,
4. $D = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$,
5. $E = \sqrt{12x^2 - 72x + 108}$,
6. $F = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$.

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes

1. $A = (-1)^n \times (-1)^{n+1} \times (-1)^{n+2}$,
2. $B = \frac{2^4 \times 4^2}{8 \times 3^{-4}}$,
3. $C = \frac{3^{-2} 2^{-2}}{3^{-7} 2^2}$,
4. $D = x\sqrt{x}x^2 \times 7\frac{x^2}{x^3}$.

2. RAPPELS SUR LES SUITES

Exercice 4 Parmi les suites suivantes, déterminer lesquelles sont arithmétiques ou géométriques :

1. $u_n = 3 + 5n$,
2. $v_n = 12 - \sqrt{n}$,
3. $w_n = -7^n$,
4. $x_n = \sqrt{2^{2n+1}}$,
5. $y_n =$ le n -ième entier positif pair,
6. $z_n = \cos(n\pi)$ et $z'_n = \sin(n\pi)$.

Exercice 5 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

1. Donner une expression de u_n
2. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2u_0 + nr}{2}.$$

3. Généraliser au calcul de la somme $u_j + \dots + u_{j+n}$ où $j \in \mathbf{N}$.
4. En déduire la valeur des sommes

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n \text{ et } 1 + 3 + \dots + 2n + 1.$$

3. POLYNÔMES

Exercice 6 Réaliser l'étude complète des trinômes du second degré suivants : forme canonique, racines, variations, signe, courbe représentative.

1. $P(x) = x^2 - 3x + 2$,
2. $Q(x) = -3x^2 + 18x - 27$,
3. $R(x) = -2x^2 + 4x - 7$.

Exercice 7 Trouver les racines des polynômes suivants :

1. $X^4 - 6X^2 + 5$,
2. $-X^{10} + 3X^9 - 3X^8$,
3. $X^3 - X^2 + X - 1$,
4. $e^{6x} + 4e^{3x} = 1$,
5. $\ln(5x) - \ln(2x) + \ln(3x + 1) = -2$.

4. AUTRES EXERCICES

Exercice 8 Trouver toutes les fonctions dérivables sur \mathbf{R} telles que pour tout x, y réels

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Exercice 9 Trouver toutes les fonctions dérivables sur \mathbf{R}_+^* telles que pour tout x, y réels

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

5. DERNIÈRE RÉVISION : DES ÉTUDES DE FONCTION

Exercice 10

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x)(x) = (2x - 5) \times e^{-x}$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

Exercice 11 Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de f .
3. En déduire que pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2$.