

Systèmes linéaires

Dans tout le chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls.

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Système linéaire

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Un système linéaire de n équations à p inconnues (ou un système linéaire $n \times p$) est un système d'équations de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 & (L_2) \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Les $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des réels donnés et les $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont les inconnues. On peut donner des noms (L_i) à chacune des équations (lignes) du système.

Σ Vocabulaire

1. Si $n = p$ on dit que le système est carré (d'ordre n ou de dimension n).
2. Le n -uplet $b = (b_1, \dots, b_n)$ est appelé **le second membre** de l'équation.
3. Si $b = 0$, alors on dit que le système n'a pas de second membre, ou qu'il est **homogène**.
4. Si deux systèmes (S) et (S') ont les mêmes solutions, on dit qu'ils sont équivalents et on note

$$(S) \sim (S') \text{ ou } (S) \iff (S').$$

5. Une solution du système est un p -uplet (x_1, \dots, x_p) qui vérifie toutes les équations. Ainsi l'ensemble des solutions d'un système est un sous-ensemble de \mathbb{R}^p .



6. Si un système n'a pas de solution, on dit qu'il est **incompatible**.

Définition 2 | Système homogène associé

Soit (S) un système linéaire non homogène. Alors si (S) est

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases},$$

le système homogène associé est

$$(S_h) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = 0 & (L_2) \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 & (L_n) \end{cases}.$$

Théorème 1

Un système linéaire homogène admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

Théorème 2

Si (x_1, \dots, x_p) et (y_1, \dots, y_n) sont des solutions d'un système homogène (S_h) et si $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

1. $(0, \dots, 0)$ est toujours solution de (S_h) .
2. $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ est aussi solution de (S_h) .
3. $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ est une solution de (S_h) .

On dit que l'ensemble des solutions de (S_h) est un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .

Théorème 3

Un système linéaire non homogène admet 0, 1 ou une infinité de solution.

Proposition 1

Si (S) admet une solution (x_1, \dots, x_n) , alors toute solution de (S) s'écrit

$$(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \text{ où}$$

(h_1, \dots, h_n) est une solution du système homogène associé (S_h) .

Ainsi si (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont des solutions de (S), alors

$$(x_1 - y_n, \dots, x_n - y_n) \text{ est une solution de } (S_h).$$

2. PIVOT DE GAUSS

2.1. Systèmes échelonnés (ou triangulaires)

Définition 3

Un système est dit échelonné (ou triangulaire) si dès que $j > i$, $a_{i,j} = 0$. Autrement dit il est sous la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ \phantom{a_{1,1}x_1} + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \dots\dots\dots \\ \phantom{a_{1,1}x_1} + \phantom{a_{2,2}x_2} + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n & (L_n) \end{cases} .$$

Pour un système triangulaire, on résout (si possible) les équations de proche en proche de bas en haut!

Exemple 1 —

2.2. Opérations élémentaires sur les systèmes

Il existe quelques opérations simples qui permettent de transformer un système en système équivalent plus facile à résoudre. L'objectif sera de transformer un système en système triangulaire.

Théorème 4

Les opérations suivantes transforment un système en un système équivalent.

1. $L_i \leftrightarrow L_j$: on échange deux lignes.
2. $L_i \leftarrow aL_i$ avec $a \neq 0$: on multiplie une ligne par un réel non nul.
3. $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ (avec $i \neq j$ et $b \in \mathbb{R}$) : on rajoute ou on soustrait à la ligne L_i un multiple de la ligne L_j .

Les deux dernières opérations peuvent se faire en même temps, on fait alors

$$L_i \leftarrow aL_i + bL_j \text{ avec } a \neq 0 \text{ et } j \neq i.$$

Vocabulaire

Ces opérations s'appellent **opérations élémentaires sur les lignes** du systèmes.

Remarque 2.1 — Cela montre que si on a deux lignes identiques ou proportionnelles on peut en supprimer une : si $L_j = \lambda L_i$ alors l'opération

$$L_j \leftarrow L_j - \lambda L_i$$

annule la ligne L_j .

Le but de ces opérations est de simplifier le système en supprimant des inconnues sur beaucoup de lignes.

Exemple 2 —

$$(S) \sim \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ 2x + y + z = 4 & L_2 \\ x - y + 2z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 3x + 2y = 7 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 3x + y = 6 & L_3 \leftarrow 2L_1 + L_3 \end{cases}$$

Remarque 2.2 — La ligne que l'on soustrait ou ajoute aux autres s'appelle la **ligne pivot**.

Remarque 2.3 — On a le droit de faire simultanément les opérations

$$L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + \mu L_1,$$

Mais on n'aurait pas le droit si le résultat de la première opération changeait celui de la deuxième, comme dans

$$L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + \mu L_2.$$

2.3. Algorithme du pivot de Gauss

L'algorithme du pivot de Gauss combine ce que l'on a vu précédemment à propos de :

- la résolution de systèmes triangulaires (ou échelonnés)
- l'élimination d'inconnues par opérations élémentaires.



Méthode (Algorithme du pivot de Gauss)

1. En appliquant successivement des opérations élémentaires pour éliminer des inconnues, transforme le système en un système échelonné équivalent.
2. On résout le système échelonné inconnue par inconnue.

Le mieux est de voir l'algorithme appliqué sur un exemple!

Exemple 3 — Exemple de pivot de Gauss Résolvons le système

$$(S) \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ -x + y + z = 4 & L_2 \\ x - y + 2z = 1 & L_3 \end{cases}$$

Par opérations élémentaires on obtient :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ -x + y + z = 4 & L_2 \\ x - y + 2z = 1 & L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 2y = 7 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -2y + 3z = -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 2y = 7 & L_2 \leftarrow L_2 \\ -3z = 5 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a obtenu un système échelonné **de rang 3** qui se résout de proche en proche : $z = \frac{5}{3}$ puis $y = \frac{7}{2}$. On trouve ensuite

$$x = 3 + z - y = 3 + \frac{5}{3} - \frac{7}{2} = \frac{18 + 10 - 21}{6} = \frac{7}{6}$$

Il y a donc une unique solution : $(\frac{7}{6}, \frac{7}{2}, \frac{5}{3})$.

3. COMMENT SAVOIR DANS QUEL CAS ON SE TROUVE ? COMMENT PRÉSENTER LES SOLUTIONS ?

3.1. Cas 1.

La première remarque est que si $n > p$, on a plus d'équations que d'inconnues. Soit le système sera incompatible, soit on va pouvoir éliminer (par pivot de Gauss) **au moins autant d'équation qu'il faut pour revenir à un système carré**. On se place désormais dans ce cas là.

3.2. Cas 2

On peut être dans le cas de la solution unique que si $n = p$, sinon on n'aura pas assez de contraintes. Regardons les trois cas qu'il est possible d'obtenir.

Cas avec aucune solution. Regardons le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ -x + y + z = 4 & L_2 \\ -x + 5y + z = 7 & L_3 \end{cases}$$

Le pivot de Gauss donne :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ -x + y + z = 4 & L_2 \\ -x + 5y + z = 7 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 2y = 7 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 6y = 10 & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ y = \frac{7}{2} & L_2 \\ y = \frac{10}{6} & L_3 \end{cases}$$

Les lignes L_2 et L_3 sont incompatibles, donc il n'y a pas de solution.

Cas avec une unique solution. On peut reprendre l'exemple déjà traité, c'est quand $n = p$ et que le pivot de Gauss donne un système échelonné. On dit alors qu'on obtient une unique solution (x_1, \dots, x_p) avec les valeurs trouvées.

Cas avec une infinité de solution. On prend un système très proches, mais avec un second membre légèrement différent.

$$(S) \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ -x + y + z = 4 & L_2 \\ -x + 5y + z = 18 & L_3 \end{cases}$$

Le pivot de Gauss donne :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ -x + y + z = 4 & L_2 \\ -x + 5y + z = 18 & L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 2y = 7 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 6y = 21 & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ y = \frac{7}{2} & L_2 \\ y = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} & L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ y = \frac{7}{2} & L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = -\frac{1}{2} & L_1 \\ y = \frac{7}{2} & L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a "gagné" un degré de liberté : on a seulement deux équations indépendantes pour trois inconnues. Si y est fixé, on voit qu'on peut fixer z ou x et que l'autre viendra de lui même. Ici on obtient un ensemble de solutions à **un paramètre**. Pour savoir combien de paramètre on aura, on calcule la quantité $p - r$ où p est le nombre d'inconnues et r le nombre d'équations indépendantes restantes à la fin.

Ici on peut dire que l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left(z - \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mais en prenant x comme paramètre libre on aurait eu

$$\left\{ \left(x, \frac{7}{2}, x + \frac{1}{2} \right), x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pas de souci, ces ensembles sont les mêmes!

Σ Vocabulaire

Le nombre d'équations indépendantes est appelé le **rang du système**. Celui-ci se lit dans un système échelonné équivalent : on est sûr de l'avoir obtenu quand on a trouvé un système triangulaire avec des coefficients **non nuls** sur la diagonale.

Si on le note r , le nombre de paramètres de l'ensemble des solutions sera $p - r$.