Thomas Cometx

CHAPITRE 12

Variables aléatoires réelles finies

Dans tout ce chapitre, (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

1. DÉFINITIONS

Définition 1 | Variable aléatoire réelle (finie)

Une variable aléatoire réelle est une application de Ω dans $\mathbf{R}$

Remarque 1.1 — Il n'est pas forcément utile de préciser Ω pour l'étude d'une variable aléatoire. Cependant, préciser $\mathrm{X}(\Omega) = \{\mathrm{X}(x), x \in \Omega\}$ (autrement dit, l'ensemble image de la variable aléatoire) est fondamental.

Remarque 1.2 — Comme Ω est fini, l'ensemble $\mathrm{X}(\Omega)$ l'est aussi.

Exemple 1 — Reprenons l'exemple du lancer du dès. L'univers est l'ensemble d'entiers $[\![1, 6]\!]$. On joue à un jeu où on gagne 10 points si on fait un nombre pair, ou le nombre inscrit sur le dès si on fait un nombre impaire. La fonction qui a un lancer associe de le nombre de points est la variable aléatoire définie par

$$\begin{cases} \mathrm{X}(n) = & 10 \text{ si } n \in \{2,4,6\} \\ & n \text{ si } n \in \{1,3,5\}. \end{cases}$$

Ici, $\mathrm{X}(\Omega) = \{1, 3, 5, 10\}$.

Exemple 2 — Prenons l'exemple du lancer de deux dès : l'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Une variable aléatoire sur cette expérience est l'association d'une valeur **numérique** à tout lancer possible. Par exemple les fonctions définies sur Ω par

1. $\mathrm{X}_1(\omega, \omega') = \omega$ (le résultat du premier lancer)
2. $\mathrm{X}_2(\omega, \omega') = \omega'$ (le résultat du deuxième lancer)
3. $\mathrm{S}(\omega, \omega') = \omega + \omega'$ (la somme des deux lancers)

sont des variables aléatoires, avec par exemple $\mathrm{X}_1(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ ou $\mathrm{S}(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

Notation

En probabilité, on s'autorise certaines notation pour décrire des événements :
- si $I \subset X(\Omega)$, $[X \in I] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}$ est l'image réciproque de I par X.
- si $x \in X(\Omega)$, $[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$ est l'ensemble des antécédents de x par X.
- si $x \in X(\Omega)$, $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\}$ est l'image réciproque de $]-\infty, x]$ par X.
- de même on $[X < x]$, $[X > x]$, $[X \geqslant x]$, $[X^2 > 1]$ ....

Définition 2 | Système complet associé à une variable aléatoire

Soit X un variable aléatoire réelle finie. Le système complet d'événements associé à X est l'ensemble des événements $[X = x]$ pour $x \in X(\Omega)$.

Définition 3 | Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire finie. La loi de X est la donnée de $X(\Omega)$ et des valeurs $P([X = x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Définition 4 | Image d'une variable aléatoire par une fonction

Soit X une variable aléatoire sur Ω et g une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$. La variable aléatoire $g(X)$ est la variable aléatoire sur Ω définie par $g(X)(\omega) = g(X(\omega))$. Son image est $g(X)\Omega) = g(X(\Omega))$.

Proposition 1 | Loi de $g(X)$

La loi de $g(X)$ est donnée par

$$\forall y \in g(X(\Omega)), P(g(X) = y) = \sum_{x \in X(\Omega), g(x) = y} P(X = x).$$

2. ESPÉRANCE ET VARIANCE

L'espérance et a variances sont des indicateurs qui permettent décrire une variable aléatoires : l'espérance correspond à la moyenne et la variance correspond à la tendance de que la VA a à s'éloigner de sa moyenne.

Définition 5 | Espérance

L'**espérance** d'une variable aléatoire finie réelle X est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Proposition 2 | Linéarité de l'espérance

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles et a, b deux réels. Alors on a

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Proposition 3 | Croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires vérifiant $X \leqslant Y$ (c'est à dire que pour tout $\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega)$. Alors on a

$$E(X) \leqslant E(Y).$$

Proposition 4

Une VA positive d'espérance nulle est une VA constante égale à zéro.

Théorème 1 | Théorème de transfert

Soit $g : (\Omega) \to \mathbf{R}$ une fonction ; On a

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X\omega} g(x)P(X = x)$$

Remarque 2.1 — Théorème admis.

Définition 6 | Variance d'une variable aléatoire réelle finie

La **variance** d'une variable aléatoire réelle finie est la quantité positive donnée par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Définition 7 | Écart-type

L'**écart-type** d'une VA réelle finie est la quantité

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Théorème 2

Une variable aléatoire de variance égale à 0 est une variable aléatoire constante.

Théorème 3 | Formule de Huygens-Koenig

Soit X une VA réelle finie,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Remarque 2.2 — Cela implique que pour toute VA X, $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$.

Proposition 5

Soit X une VA réelle finie, et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Remarque 2.3 — On ne sait pas encore calculer $V(X + Y)$ de façon automatique.

Définition 8 | VA centrée réduite

Une VA est dite **centrée réduite** si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

Exemple 3 — Si X est une VA réelle finie, alors la VA $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

3. LOIS USUELLES

3.1. Variable aléatoire certaine

Définition 9 | Variable aléatoire certaine

Une variable aléatoire X est dite certaine si $X(\Omega)$ est un singleton$\{x\}$. Dans cas là $P(X = x) = 1$.

Proposition 6

Soit X la variable aléatoire certaine égale à x, alors
1. $E(X) = x$,
2. $V(X) = 0$.

3.2. Loi de Bernoulli

Définition 10 | Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Cette loi apparait dans de très nombreuses situations : en fait dans n'importe quel jeu où on peut gagner ou perdre il suffit de définir la variable aléatoire qui vaut 1 si on a gagné et 0 si on a perdu. p est alors la probabilité de succès ou de victoire.

Vocabulaire

Le réel $p \in [0,1]$ s'appelle la **probabilité de succès**.

Notation

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Proposition 7

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ une variable aléatoire de Bernoulli. On a
1. $E(X) = p$
2. $V(x) = p(1-p)$.

Définition 11 | Loi de Rademacher

Une variable aléatoire suit une loi de Rademacher si $X(\Omega) = \{-1,1\}$ et $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Remarque 3.1 — Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, alors $Y = 2X-1$ suit une loi de Rademacher. On déduit rapidement que $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

3.3. Loi binomiale

Définition 12 | Loi binomiale

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $p \in [0,1]$.Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres si $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k.$$

Notation

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Remarque 3.2 — On a bien

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^k = (p+(1-p))^n = 1$$

ce qui prouve que c'est bien une loi de probabilité.

Théorème 4

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_i$$

suit une loi binomiale de paramètres n, p.

Remarque 3.3 — Cela justifie que la loi binomiale est la loi qui compte les succès :

- chacune des variables aléatoires X_i correspond à la réalisation d'une expérience de Bernoulli qui a une probabilité p de succès,
- pour avoir k succès : il faut choisir les numéros des expériences qui ont réussi ce qui donne le coefficient binomial. On multiplie ensuite par la probabilité d'obtenir la configuration choisie, c'est (par indépendance) p^k (réussite des expériences choisies) $\times$ $(1-p)^k$ (echec des expériences non choisies) ..

Exemple 4 — On lance un même dès équilibré n fois. Quelle est la loi du nombre de 6 obtenus ? Quelle est la loi du nombre de nombres pairs obtenus ?

Proposition 8

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale n, p, alors

1. $E(X) = np$,
2. $V(X) = np(1-p)$.

3.4. Loi uniforme

Définition 13 | Loi uniforme

soit n un entier strictement positif. Une variable aléatoire suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!], P(X = k) = \frac{1}{n}$.

Notation

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Proposition 9

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ alors

1. $E(X) = \frac{n+1}{2}$,

2. $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Définition 14

Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Une variable aléatoire suit une loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ si $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$ et pour tout $k \in [\![a, b]\!], P(X = k) = \frac{1}{n}$. (où $n = b - a + 1 = \text{card}[\![a, b]\!]$).

Proposition 10

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a, b]\!])$ alors

1. $E(X) = \frac{a+b}{2}$,
2. $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ avec $n = b - a + 1 = \text{card}[\![a, b]\!]$.