Thomas Cometx

CHAPITRE 14

Intégrales et primitives

1. PRIMITIVES (RAPPELS)

Définition 1 | Primitive

Soit f une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle $[a,b]$.
Une primitive de f est une fonction dérivable sur $[a,b]$ vérifiant

$$\forall x \in [a,b], \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Théorème 1

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F_1 une primitive de f/
1. Soit F_2 une primitive de f. Alors $\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}_2$ est une fonction constante.
2. Toute fonction de la forme $\mathrm{F}_3 = \mathrm{F}_1 + c$, avec $c \in \mathbf{R}$, est une primitive de f.

Il faut connaître les primitives usuelles :

D_f	$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$
$\mathbf{R}$	0	$c \in \mathbf{R}$
$\mathbf{R}$	$\exp(x)$	$\exp(x) + c$
$]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$	$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|) + c$
$\mathbf{R}$	x^n pour $n \in \mathbf{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbf{N}, n > 1$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{1}{(-n+1)x^{n-1}} + c$
$]0,+\infty[$	x^{α} pour $\alpha \in \mathbf{R}$	$\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha}$
$]0,+\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\mathbf{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\mathbf{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	$\frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$	$\tan(x) + c$
$\mathbf{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$

La dérivation des fonctions composées nous permet aussi de retrouver un certain nombres de primitives. Le but est de reconnaître les formes $u' \times g' \circ u$ qui se primitivent en $g \circ u$.

Condition	f	F
	$u'e^u$	$e^u + c$
	$u' \times u$	$\frac{u^2}{2} + c$
	$u'u^n$ pour $n \in \mathbf{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
$u \neq 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert) + c$
$u \neq 0$	$u'u^{-n} = \frac{u'}{u^n}$pour $n \in \mathbf{N}, n > 1$	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{1}{(-n+1)u^{n-1}} + c$
	$u'\cos(u)$	$\sin(u) + c$
	$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + c$
$u \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$	$u'(1+\tan(u)^2)$ ou $\frac{u'}{\cos(u)^2}$	$\tan(u) + c$
	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u) + c$

Exemple 1 — Trouver les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles de travail :

1. $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$
2. $g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}$
3. $h : x \mapsto \frac{7}{x^2-6x+9}$
4. $j : x \mapsto \frac{x-3}{x+4}$
5. $w : x \mapsto \frac{2x+4}{x^2+8x+6}$
6. $v : x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$.

Exemple 2 — Si u est une fonction positive, alors une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{(u)}$

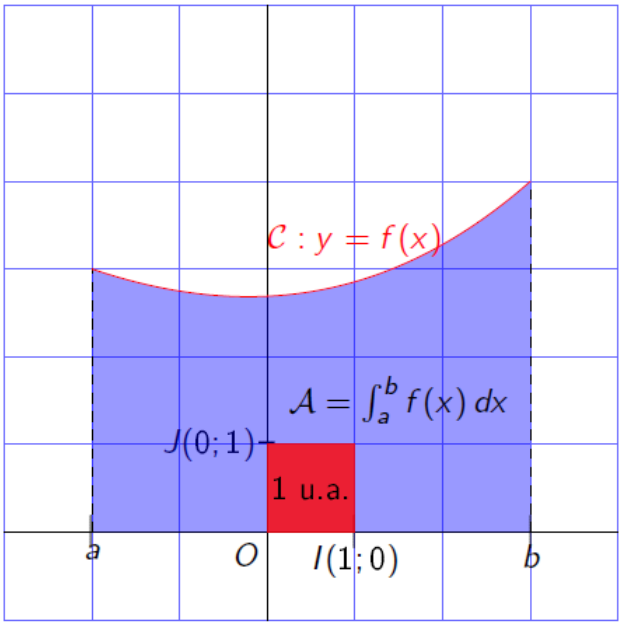
2. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE SUR UN INTERVALLE

Dans cette partie, f est une fonction à valeurs positives continue sur l'intervalle $[a, b]$. On rappelle que le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}(1;0), \mathrm{J}(0;1))$.

2.1. Aire sous la courbe représentative de la fonction f

Définition 2

- **L'unité d'aire**, notée u.a. est l'aire du rectangle OIJK où $\mathrm{K}(1;1)$.
- **Le domaine situé sous la courbe** $\mathscr{C}$ est la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
- **L'intégrale de la fonction f entre a et b** est l'aire $\mathscr{A}$ du domaine situé sous la courbe représentative de f, $\mathscr{C}$, dans un repère orthogonal. Elle s'exprime en u.a. et on la note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque 2.1 — La variable d'intégration est dite **muette**, exactement comme les indices de sommation. Ainsi on pourra noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)du.$$

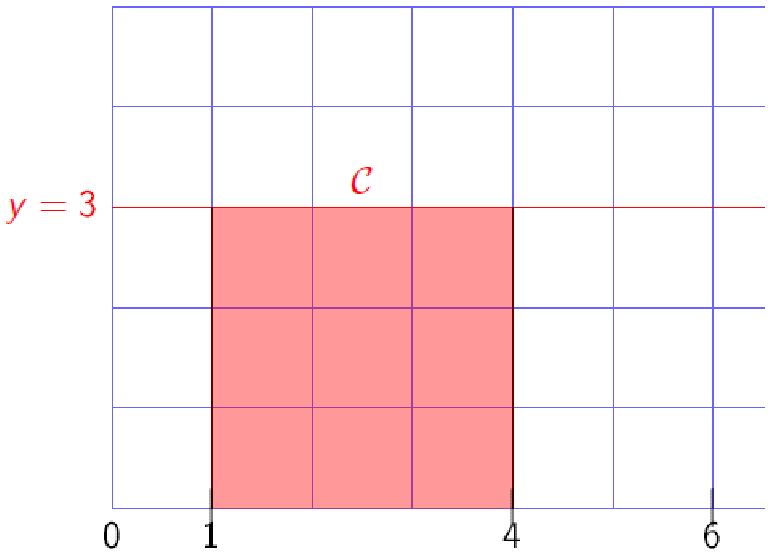
Remarque 2.2 — On a une **relation de Chasles** : si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et $m \in]a,b[$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^m f(x)\,\mathrm{d}x + \int_m^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.3 — Si $b = a$, on regarde "l'aire d'un segment", ainsi

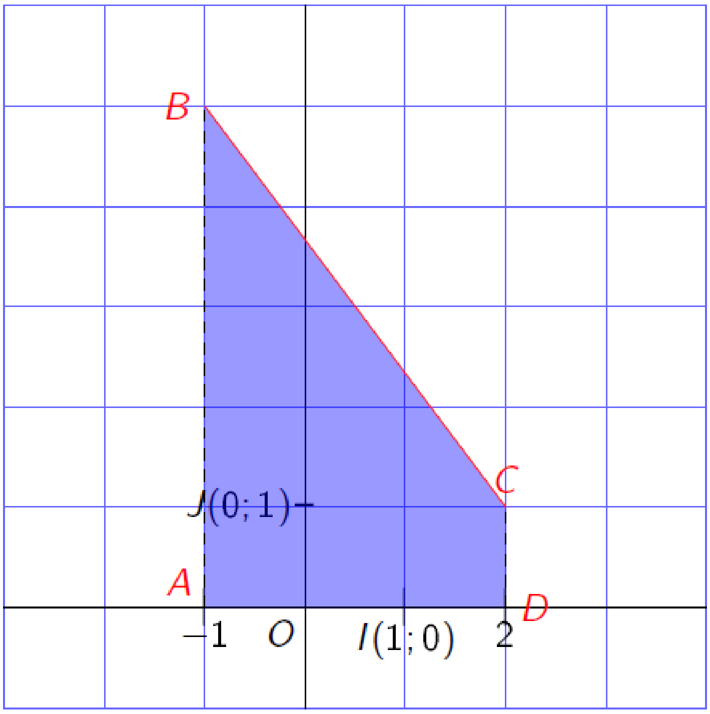
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exemple 3 — ***Calcul de*** $\int_1^4 3\,\mathrm{d}x$ On se ramène au calcul de l'aire d'une figure connue.



L'aire à déterminer est l'aire sous la courbe d'équation $y = 3$. C'est l'aire du domaine délimité par les droites horizontales d'équations $y = 0$ et $y = 3$, et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 4$. On calcule alors l'aire d'un carré de coté de longueur 3. Son aire est donc $3^2 = 9$ unités d'aire.

Exemple 4 — ***Calcul*** $\int_{-1}^2 \frac{-4x+11}{3}\,\mathrm{d}x$



L'aire à déterminer et l'aire du domaine encadré par la droite d'équation $y = \frac{-4x+11}{3}$ et les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 2$. Traçons la droite oblique : pour $x = -1$, on obtient $y = 5$ et pour $x = 2$ on obtient $y = 1$. L'aire à calculer est celle du trapèze ABCD de sommets A$(-1;0)$, B$(-1;5)$, C$(2;1)$ et D$(2;0)$. L'aire du trapèze est donnée par $\mathscr{A}(\text{ABCD}) = \frac{b_1+b_2}{h}$ où b_1 et b_2 sont respectivement les longueurs des petites et grandes bases, et où h est la hauteur du trapèze. Ici

$$\int_{-1}^{2} \frac{-4x+11}{3}\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}(\text{ABCD}) = \frac{5+1}{3} = 2.$$

2.2. Expression d'une primitive à partir d'une intégrale

Théorème 2

La fonction $\mathrm{F}_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $\mathrm{F}_a(a) = 0$.

Preuve **[Dans le cas où f est croissante]** Toutes les primitives de f diffèrent d'une constante réelle k. Il existe donc une unique primitive de f qui s'annule en a. De plus, $F_a(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$. Il nous reste donc uniquement à démontrer que F_a est bien une primitive de f, c'est à dire que $(F_a)' = f$. Pour cela, revenons à la limité du nombre dérivé. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $\lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = 0$. On fixe $x \in [a,b]$.

Cas 1 : si $h > 0$. La relation de Chasles donne

$$F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Comme f est croissante, pour tout $t \in [x, x+h]$, $f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x+h)$. L'aire sous la courbe de f est alors encadrée par l'aire du rectangle de longueur h et de largeur $f(x)$ et celle du rectangle de longueur h et de largeur $f(x+h)$. Ainsi,

$$hf(x) \leqslant F(x+h) - F(x) \leqslant hf(x+h).$$

Donc

$$f(x) \leqslant \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} \leqslant f(x+h).$$

Comme f est continue, $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Donc, par théorème d'encadrement des limites, $\lim_{h\to 0^+} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = 0$.

Cas 2 : si $h < 0$. On fait de même en encadrant $hf(x+h) \leqslant F_a(x+h) - F_a(x) \leqslant hf(x)$.

Ainsi pour tout x,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = 0.$$

Donc F_a est dérivable en x et $(F_a)'(x) = f(x)$.

Théorème 3

Pour toute primitive F de f sur $[a,b]$ on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Preuve Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. On sait que toutes les primitives de f diffèrent d'une constante. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = F_a(x) + k$.

Alors

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= (F_a(b) + k) - (F_a(a) + k) \\
&= F_a(b) + k - F_a(a) - k \\
&= F_a(b) - F_a(a) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(x)\,dx \text{ car } \int_a^a f(x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Remarque 2.4 — Cette formule est **la principale façon de calculer des intégrales**.

Exemple 5 — *Calcul de $\int_0^5 (x^2+1)\,dx$*

Une primitive de la fonction f qui à x associe $f(x) = x^2+1$ est $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + x$. Alors

$$\int_0^5 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^5 = \frac{5^3}{3} + 5 - \left(\frac{0^3}{3} + 0\right) = \frac{125}{3} + 5 = \frac{140}{3}.$$

3. INTÉGRALE D'UNE FONCTION DE SIGNE QUELCONQUE

Dans cette partie, f est une fonction à valeurs positives continue sur l'intervalle I.

3.1. Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Pour définir l'intégrale d'une fonction qui n'est pas forcément positive, on ne peut pas utiliser la notion d'aire. Pour cela, on utilise le lien avec les primitives découvert dans la partie précédente.

Définition 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour a et b deux nombres réels appartenant à I, **l'intégrale de f entre a et b** est le nombre réel **F(b) - F(a)**, où F est une primitive de f sur I. On le notera

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 1

Le nombre ainsi défini ne dépend pas du choix de la primitive choisie.

Notation

On écrit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = [\mathrm{F}(x)]_a^b.$$

Notation

Pour noter une primitive quelconque de f, on pourra noter

$$\int f(x)dx \text{ ou } \int f \text{ ou } \int f dx.$$

Proposition 2

Pour tous réels a et b de I,

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve Si F est une primitive de f sur I, alors

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)\\ &= -(\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(b))\\ &= -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3.2. Lien aire - intégrales

On remarque que si f est une fonction négative, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $-f$ est une fonction positive, la quantité $\int_a^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe représentative de $-f$. Or cette aire est la même que l'aire située entre la courbe de f et l'axe des abscisses. Ainsi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire délimitée par la courbe de f et l'axe des abscisses, on parle d'**aire algébrique** sous la courbe.

Proposition 3

Pour toute fonction continue sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique sous la courbe représentative de f. Autrement dit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}^+ - \mathscr{A}^-,$$

où $\mathscr{A}^+$ est l'aire du domaine délimité par la partie positive le courbe de la fonction alors que $\mathscr{A}^-$ est l'aire du domaine délimité par la partie négative de la courbe de la fonction.

4. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$.

4.1. Propriétés algébriques

Proposition 4 | Linéarité de l'intégrale

1.
$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Pour tout réel λ,
$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve On démontre 1. Si F et G sont des primitives de f et g sur $[a, b]$, alors on sait que $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est une primitive de $f+g$ sur $[a, b]$. Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x &= [\mathrm{F}+\mathrm{G}]_a^b \\ &= (\mathrm{F}+\mathrm{G})(b) - (\mathrm{F}+\mathrm{G})(a) \\ &= \mathrm{F}(b) + \mathrm{G}(b) - \mathrm{F}(a) - \mathrm{G}(a) \\ &= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) + \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On retrouve une propriété que l'on avait remarquée sur les intégrales de fonctions à valeurs positives, la relation de Chasles.

Proposition 5 | Relation de Chasles

Pour tout réels c, d, e de l'intervalle $[a, b]$,
$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{F}(d) - \mathrm{F}(c) + \mathrm{F}(e) - \mathrm{F}(d) \\ &= \mathrm{F}(e) - \mathrm{F}(c) = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Exemple 6 — *Intégrale d'une fonction définie par morceaux*

Soit f la fonction définie sur $[-1;5]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in [-1;2] \\ \frac{x^2}{2} \text{ si } x \in]2,5]. \end{cases}$$

La fonction f est bien continue car $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{2} = 2 = f(2)$. On peut donc calculer son intégrale $\int_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. La relation de Chasles donne

$$\begin{aligned} \int_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^2 2\,\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= (2-(-1))2 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_2^5 \\ &= 6 + \frac{125}{6} - \frac{8}{6} = \frac{153}{6}. \end{aligned}$$

4.2. Intégrales et inégalités

Le lien aire-intégrales permet d'établir la propriété suivante, appelée **positivité de l'intégrale**.

Proposition 6 | Positivité de l'intégrale

- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

On en déduit la théorème suivant.

Théorème 4 | Croissance de l'intégrale

Si pour tout $x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve Si pour tout $x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leqslant 0$. Par positivité de l'intégrale $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$, et par linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 7 — *En comparant* 0*,* $e^{-x}\,\mathrm{d}x$ *et* e^{-x^2}*, encadrer* $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant x$, donc $0 \geqslant -x^2 \geqslant -x$. Par croissance de la fonction exponentielle, on a

$$1 \geqslant e^{-x^2} \geqslant e^{-x}.$$

La croissance de l'intégrale implique que

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Le calcul des intégrales donne $1 \geqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant [-e^{-x}]_0^1$ soit

$$1 \geqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant e-1.$$

4.3. Valeur moyenne d'une fonction

Définition 4

La **valeur moyenne d'une fonction** sur l'intervalle $[a,b]$ est la quantité

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 4.1 — Interprétation graphique Si f est une fonction positive, alors l'intégrale de f entre a et b est la même que l'aire du rectangle de longueur $(b-a)$ et de largeur μ :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

5. SOMMES DE RIEMANN

Comme nous le verrons en TP Informatique, l'aire sous la courbe d'une fonction positive peut être approchée par **la méthode des rectangles**. Il s'agit de découper l'intervalle $[a,b]$ en subdivisions régulières de la forme $[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}]$. On approxime alors l'aire sous la courbe par la somme des aires de rectangles situées entre les segments de la subdivision et la courbe. Si on augmente la précision de la subdivision, on s'approche de plus en plus de l'aire réelle. C'est le principe des sommes de Riemann.

Théorème 5 | Sommes de Riemann

Soit $f \in \mathrm{C}([a,b])$. La suite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(b-a)} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(b-a)} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve Pour simplifier, on se ramène au cas où f est de classe C^1.

Remarque 5.1 — On voit parfois la somme entre 0 et n ou 1 et n. Cela ne change rien nature de la somme et le résultat reste vrai. Ce théorème nous permet de calculer des limites de somme jusque là difficiles à calculer.

Exemple 8 — On veut calculer la limite de $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{n^2}$. On commence par réécrire la somme comme

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}.$$

Cela correspond à une somme de Riemann avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=x$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\lim_{n} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} &= \int_0^1 x dx \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

6. INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème 6 | Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose que leurs dérivées sont continues sur I. Alors pour tout a et b des réels de I,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve On calcule $\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x$ de deux façons différentes. Comme uv est une primitive de $(uv)'$, on a d'abord

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b.$$

D'autre part, la formule de dérivation du produit de deux fonctions donne

$$\begin{aligned}\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b,$$

ce qui donne la formule à démontrer.

Remarque 6.1 — On parle d'intégration par partie**S** car il y a **plusieurs parties**.

La formule d'intégrations par parties sert à la fois à calculer des intégrales et des primitives de fonctions. Terminons ce cours par des exemples de calcul.

Exemple 9 — ***Calcul d'une intégrale par intégration par parties***

On souhaite calculer

$$\int_0^2 xe^x\,\mathrm{d}x.$$

On ne connait pas de primitive de cette fonctions ! Il faut choisir quelles seront les fonctions u et v pour appliquer la formule. Prenons $u(x) = x$. Dans la formule, la quantité sous l'intégrale est $u(x)v'(x)$, donc nécessairement $v'(x) = e^x$. Ainsi $u'(x) = 1$ et on peut prendre $v(x) = e^x$ (on peut prendre n'importe quelle primitive, autant prendre la plus simple !). Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,2]$ et leurs dérivées sont continues. La formule d'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^x\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [u(x)v(x)]_0^2 - \int_0^2 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [xe^x]_0^2 - \int_0^2 1\times e^x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties nous a ramené à une intégrale plus facile à calculer. On obtient

$$\begin{aligned}[xe^x]_0^2 - \int_0^2 1\times e^x\,\mathrm{d}x &= 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 e^x\,\mathrm{d}x\\ &= 2e^2 - [e^x]_0^2\\ &= 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.\end{aligned}$$

Exemple 10 — ***Un exemple de rédaction : calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^x u\sin(u)\,\mathrm{d}u$***

On calcule l'intégrale par intégration par parties. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$. On a alors $u'(x) = 1$ et on peut prendre $v(x) = -\cos(x)$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,\pi]$ et leurs dérivées sont continues. Donc, par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^\pi + [\sin(x)]_0^\pi\\ &= -\pi\cos(\pi) + 0\times\cos(0) + \sin(\pi) - \sin(0) = -\pi\times(-1) + 0 + 0 - 0 = \pi.\end{aligned}$$

Méthode ***(Déterminer une primitive par intégration par parties)***

Comme vu précédemment dans le cours, si f est une fonction continue sur I et si $a \in \mathrm{I}$, alors

$$\mathrm{F}_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de f s'annulant en a. La formule d'intégration par parties nous permet alors de calculer des primitives de fonctions plus compliquées. Si on reprend l'exemple de f définie par $f(x) = x\sin(x)$, une primitive de f est par exemple donnée par

$$\begin{aligned}
F_0(x) &= \int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [-t\cos(t)]_0^x - \int_0^x -\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -x\cos(x) + 0\cos(0) - \int_0^x -\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -x\cos(x) + [\sin(t)]_0^x \\
&= -x\cos(x) + \sin(x) - 0 \\
&= -x\cos(x) + \sin(x).
\end{aligned}$$

Remarque 6.2 — Le plus difficile, dans l'intégration par parties, est de déterminer les fonctions u et v'. Voici quelques petites remarques pour vous aider à faire ce choix

1. $v'(x)$ est toujours une fonction dont on connait une primitive : la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques joueront donc souvent ce rôle.
2. $u(x)$ est une fonction qui "devient plus simple si on la dérive" : les polynômes peuvent jouer ce rôle car leur degré baisse quand on les dérive. La fonction ln devient aussi plus simple quand on la dérive car $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

7. CHANGEMENT DE VARIABLE

Un nouvelle méthode pour calculer une intégrale est le changement de variable. Bien que essentiellement basée sur la formule $(f \circ q)' = g' \times f' \circ q$, elle donne une façn automatique de mener à bien certains calculs.

Théorème 7 | Changement de variable

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $\phi \in C^1([a, b])$ une fonction strictement monotone. On a

$$\int_a^b \phi'(x) f(\phi(x)) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt.$$

Preuve Soit F une primitive de f alors on a

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

On calcule $(F \circ \phi)'(x) = \phi'(x) \times f(\phi(x))$. Ainsi $F \circ \phi$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \phi'(x) f(\phi(x))$. On en déduit que

$$\int_a^b \phi'(x) f(\phi(x)) dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

On a donc montré l'égalité

$$\int_a^b \phi'(x) f(\phi(x)) dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt.$$

Cette formule est bien jolie, mais il faut maintenant apprendre à l'utiliser. Commençons par quelques quelques exemples.

Méthode *(Calculer une intégrale $\int_a^b f(\phi(x)) dx$ par changement de variable)*

1. Identifier la partie de l'intégrale qui pourrait être la nouvelle variable : on pose $u = \phi(x)$,
2. Vérifier que le changement de variable est bien C^1 et strictement monotone,
3. On change les bornes : a devient $\phi(a)$ et b devient $\phi(b)$,
4. On remplace l'élément d'intégration dx à l'aide de la relation $du = \phi'(x) dx$.

Exemple 11 — *Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x - \pi) dx$.* Ici, ce qui nous embête, c'est le $2x - \pi$. Posons $u = 2x - \pi$. C'est bien un changement de variable C^1 et strictement croissant. Les bornes deviennent $-\pi$ et $-frac\pi 2$. L'élément d'intégration vérifie $du = 2\,dx$

donc d$x = \frac{du}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x-\pi)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(u)du \\ &= \frac{1}{2}[\sin(u)]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vocabulaire

Un changement de variable de la forme $u = ax + b$ s'appelle un **changement de variable affine**. C'est le seul changement qu'on vous demandera **toujours** sans indication.

Exemple 12 —

1. Soit f une fonction continue impaire sur $]-4,4[$, montrer que $\int_{-4}^{4} f(x)dx = 0$,
2. A l'aide du changement de variable $y = \sin(x)$, calculer

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)^2}dx,$$

3. A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{1+e^x}$ calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.